代数幾何学シンポジウム記録
1981年度　pp.286-352

A Riemann-Roch type inequality for ample divisors（大阪大学における松阪輝久教授による連続講義）

（満渕俊樹・角田秀一郎記）

§1. Polarization

任意の非特異楕円曲線は、ある上半平面上の点 τ に対して、$\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau$ と同型となる。一方これは更に非特異 plane cubic $y^2 = 4x^3 - g_2(\tau)x - g_3(\tau)$ と同型である。ここで

$$j(\tau) := (12\, g_2(\tau))^3 / (g_2(\tau)^3 - 27\, g_3(\tau)^2)$$

とおくと、j は上半平面 $\mathcal{H}$ から $\mathbb{A}^1$ への morphism となり、しかも

$$j(\tau) = j(\tau') \text{ if and only if } \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau'$$

であることが知られている。そこで $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2;\mathbb{Z})$ としたとき

$$\mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau = \mathbb{C}/\mathbb{Z}(c\tau+d)+\mathbb{Z}(a\tau+b) \cong \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\frac{a\tau+b}{c\tau+d}$$

が成りたち、$\tau \in \mathcal{H}$ に対して

$$\begin{tikzcd} \tau \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathbb{C}/\mathbb{Z}+\mathbb{Z}\tau \arrow[dl] \\ & j(\tau)\ (= \tau \bmod SL(2;\mathbb{Z})) & \end{tikzcd}$$

なる対応を考えることによって次の commutative diagram を得る。

$$
\begin{tikzcd}
\text{上半平面 } \mathcal{H} \arrow[rr] \arrow[dr, "j"'] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \{\text{nonsingular elliptic curves}\} \arrow[dl, "\cong"'] \\
& A^1 \, (= \mathcal{H} / SL(2;\mathbb{Z})) &
\end{tikzcd}
$$

“こういったことが楕円曲線の自然な拡張であるアーベル多様体についてどうなるか”という問題がおこる。これに関して Siegel らの仕事が基本的である。まずはじめにアーベル多様体の定義から復習しよう。

定義 (1.1): V が g 次元アーベル多様体であるとは次の条件 (1), (2) をみたすことをいう。

(1) 複素多様体として、V は $\mathbb{C}^g$ を $\mathbb{R}$ 上 rank $2g$ の discrete subgroup Ω で割った $\mathbb{C}^g/\Omega$ と同型。

(2) V 上に ample 因子 X が存在する。

そこでアーベル多様体 $V\,(=\mathbb{C}^g/\Omega)$ 上に ample 因子 X を固定する。このとき X は自然に $H^2(V;\mathbb{Z})\ (\cong \Lambda^2 H^1(V;\mathbb{Z}))$ の元とみなせ、したが

って $\Omega\ (\cong H_1(V;\mathbb{Z}))$ の適当な基底 $u_1, u_2, \cdots, u_{2g}$ をとって、$2g\times 2g$ 行列 $E_X := (\langle X, u_i\wedge u_j\rangle)_{1\leq i,j\leq 2g}$ を

$$E_X = \begin{pmatrix} 0 & D \\ -D & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{where } D = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_g \end{pmatrix},$$

の形に表わすことができる（Frobeniusの標準形）。但し各 d_i は正整数でかつ $d_i \mid d_{i+1}$。この E_X を X の交点行列とよぶ。簡単のため D を単位行列 I_g としよう。更に $u_1, u_2, \cdots, u_g$ は

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \cdots\cdots \quad , \quad u_g = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の形に標準化されていると仮定してもよい。そこで $u_{g+i}\ (1\leq i\leq g)$ を

$$u_{g+i} = \begin{pmatrix} z_{1i} \\ z_{2i} \\ \vdots \\ z_{gi} \end{pmatrix}$$

と書き表わし、$g\times g$ 行列 Z を $Z := (z_{ij})_{1\leq i,j\leq g}$ と定義する。（このとき Ω を単に (I_g, Z) と書きあらわすことにする。）今、$u_1^*, u_2^*, \cdots, u_{2g}^*$ を $u_1, u_2, \cdots, u_{2g}$ の dual basis とすると、$H^2(V;\mathbb{Z})$ の元としての X は

$$X = \sum_{i=1}^{g} u_i^* \wedge u_{i+g}^*$$

の形に表わされる。ここで $X \in H^{1,1}(V;\mathbb{Z})$ であることより ${}^tZ = Z$。更に X が ample 因子であることより、$\mathrm{Im}\, Z$ は正定値（これを $\mathrm{Im}\, Z > 0$ と書くことにする）。さて

$$\mathcal{H}_g := \{ Z \ ;\ g\times g \text{ 行列で } {}^tZ = Z \text{ かつ } \mathrm{Im}\, Z > 0 \}$$

とおき Siegel 上半平面とよぶ。このとき $\mathcal{H}_g$ の任意の元 Z に対して $V_Z := \mathbb{C}^g/(I_g, Z)$ はアーベル多様体になっていることが容易にわかる。これは交点行列が $\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ であるような V_Z 上の因子 X_Z の存在が、上の議論を逆にたどっていけば、すぐにわかるからである。いま

$$\Gamma_g := \left\{ \mu \in SL(2g;\mathbb{Z}) \,\middle|\, \mu\cdot\begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}\cdot {}^t\mu = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

とおくとき、Γ_g は $\mathcal{H}_g$ に次のように作用することが知られている：即ち Γ_g の任意の元 μ を

$$\mu = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}, \qquad A, B, C, D : g\times g \text{ 行列},$$

の形に書き表わしたとき、μ は $\mathcal{H}_g$ の任意の元 Z に対し

$$Z \longmapsto \mu(Z) := (AZ+B)(CZ+D)^{-1} \in \mathcal{H}_g$$

で discontinuous に作用する。ここで大切なことは $Z, Z' \in \mathcal{H}_g$ に対して次の同値性がいえることである。

$$\boxed{Z' = \mu(Z),\ {}^{\exists}\mu \in \Gamma_g} \Longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} \exists \text{ isomorphism } f : V_Z \cong V_{Z'} \\ \text{s.t. } f(X_Z) \equiv X_{Z'} \ (\text{num. equiv.}) \end{array}}$$

よって (V_Z, X_Z) を pair で考えて同型でわけるということは Siegel 上半平面 $\mathcal{H}_g$ を Γ_g で割ることと同等となる。

$$\begin{tikzcd} \text{Siegel 上半平面 } \mathcal{H}_g \arrow[rr] \arrow[dr] & \arrow[d, phantom, "\circlearrowright"] & \left\{ \begin{array}{l} \text{principally polarized} \\ \text{abelian varieties of dim } g \end{array} \right\} \arrow[dl, "\cong"'] \\ & \mathcal{H}_g/\Gamma_g & \end{tikzcd}$$

それ故 modular function $(= \mathcal{H}_g$ 上の meromorphic function で Γ_g で不変なもの$)$ や modular form 等が重要であることはいうまでもない。

一方、$\mathcal{H}_g/\Gamma_g$ は non-compact なので都合の悪いことが多い。そこで、その compact 化を考えることが必要となってくる。$\mathcal{H}_g/\Gamma_g$ に $\mathcal{H}_{g-1}/\Gamma_{g-1}$ をくっつけ、更に $\mathcal{H}_{g-2}/\Gamma_{g-2}$ をくっつけ, $\cdots$, 同様の操作をくりかえして compact 化がつくれる。これは佐武[12], Baily[2]らの重要な結果である。

ところで曲線とアーベル多様体は密接な関係にある。C を種数 $g \geqq 1$ の非特異曲線, J_C を C の Jacobian variety, Θ_C を J_C 上の Riemann のテータ因子とする。このとき $C \subseteq J_C$ なる自然なうめこみが考えられるが、例えば

$$(\Theta_C^{g-1}) \equiv (g-1)!\, C \quad (\text{num. equiv.})$$

が成りたつ。(この abstract case の証明は松阪[8]を見よ。また Θ_C の交点行列は $E_{\Theta_C} = \begin{pmatrix} 0 & I_g \\ -I_g & 0 \end{pmatrix}$ の形に書ける($\because$ Poincaré duality)。こうして (J_C, Θ_C) の pair を考えることによって、もとの曲線 C の information をかなり再生できる。(たとえば、Torelli の定理のように)。

一般の代数多様体についても、アーベル多様体の交点行列を固定したのと同じことを考える必要がある。

定義 (1.2): V を n 次元非特異射影多様体, X を V 上の ample 因子とする。更に $\mathcal{X} = \{ Y \mid Y$ は V 上の因子で $rX \equiv sY$ となる $r \in \mathbb{Z}$ および $0 \neq s \in \mathbb{Z}$

が存在する$\}$とおく。このとき pair $(V, \mathfrak{X})$ を polarized 多様体とよび，また $\mathfrak{X}$ の元で numerically trivial でないものを polar divisor とよぶ。$\mathfrak{X}$ を numerical equivalence (arithmetic equivalence ともいう) でわった space $\mathfrak{X}/\equiv$ は rank 1 の free $\mathbb{Z}$-module となるので，$\mathfrak{X}$ に属するある ample 因子 X_0 が存在して $\mathfrak{X}$ の任意の元 Y に対して $Y \equiv t X_0$ をみたすような整数 t が存在する。この X_0 のことを basic polar divisor という。

さてこの§の終りまで基礎体 $= \mathbb{C}$ と仮定する。このとき次のことが成りたつ。

定理(1.3)：$\varphi: V \to T$ を非特異代数多様体 V から連結非特異な曲線 T への proper かつ smooth な全射だとし，しかもすべての $t \in T$ に対し，ファイバー $V_t := \varphi^{-1}(t)$ は連結だとする。更に X を V 上の因子とし，いかなる $t \in T$ に対しても $X_t := X|_{V_t}$ が V_t 上の ample 因子であると仮定する。このとき，任意の $t_1, t_2 \in T$ に対して，もし X_{t_1} が V_{t_1} 上の basic polar divisor ならば、X_{t_2} も V_{t_2} 上の basic polar divisor となっている。

(1.3)の証明： 完全列 $0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{O} \to \mathcal{O}^* \to 0$ から導かれる cohomology group の homomorphism $H^1(V_t, \mathcal{O}^*) \to H^2(V_t; \mathbb{Z})$ と、自然な map $H^2(V_t; \mathbb{Z}) \to H^2(V_t; \mathbb{Z})/torsion$ を合成した h_t : $H^1(V_t, \mathcal{O}^*) \to H^2(V_t, \mathbb{Z})/torsion$ を考える。このとき、X_t が basic polar divisor であるということは $h_t(\mathcal{O}(X_t))$ $(= [X_t])$ が $H^2(X; \mathbb{Z})/torsion$ の中で 2 以上の正整数では割り切れないということを示している（cf. 松阪[7]）。但し、$[X_t]$ とは X_t を $H^2(V_t; \mathbb{Z})/torsion$ の元とみなしたもののこととする。いま t_1 と t_2 を piecewise C^∞ な path で結ぶことによって V_{t_1} と V_{t_2} の diffeomorphism が得られ、次の可換な diagram が induce される。

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{\rho_1} & H^2(V_{t_1}; \mathbb{Z})/torsion \\ H^2(V; \mathbb{Z})/torsion & \circlearrowright & \cong \\ & \xrightarrow{\rho_2} & H^2(V_{t_2}; \mathbb{Z})/torsion \end{array}$$

ここで上と同様、X を $H^2(V; \mathbb{Z})/torsion$ の元とみなしたものを $[X]$ で表わすことにすると、

$$h_{t_\alpha}(\mathcal{O}(X_{t_\alpha})) = [X_{t_\alpha}] = \rho_\alpha([X]), \qquad \alpha = 1, 2,$$

故に isomorphism i によって、もし X_{t_1} が basic polar divisor ならば X_{t_2} も同様である。　Q. E. D.

$(V, \mathfrak{X})$ を n 次元 polarized 多様体とし、X_V を V 上の basic polar divisor とする。このとき、
$P(\nu) := \chi(V, \nu X_V)$ は ν に関する n 次多項式となり、polarized 多様体 $(V, \mathfrak{X})$ の Hilbert 多項式と呼ばれる。そこで P をある多項式として、Σ_P を、Hilbert 多項式 P をもつ polarized 多様体全体の集合とする。大切なことは
"Σ_P は(有限個の)代数多様体で表現される"
ということである。この事実の証明は、Chow variety の理論から、次の定理の証明に容易に reduce される。

定理 (1.4): (Matsusaka's Big Theorem [9])。$P(\nu)$ を ν の有理数係数の多項式で、いかなる整数 ν に対しても $P(\nu)$ の値が整数になるようなものだとする。このとき多項式 $P(\nu)$ だけによる正整数 $\nu_0 = \nu_0(P)$ が存在して、$\chi(V, L^{\otimes \nu}) = P(\nu)$ をみ

たす非特異射影多様体 $V/\mathbb{C}$ とその上の ample line bundle L のいかなる pair (V, L) に対しても $L^{\otimes r}$ は $r \geqq r_0$ のとき必ず very ample となる。

定理 (1.4) の特別な場合は well-known である。たとえば種数 g の非特異曲線の場合 $r \geqq 2g+1$ のとき $L^{\otimes r}$ は very ample となる（例えば Hartshorne [3 ; p.22] を見よ）。またアーベル多様体の場合 $r \geqq 3$ であれば $L^{\otimes r}$ は very ample である（cf. Mumford [11 ; p.163]）。しかしいずれの場合にしろ Hilbert 多項式が簡単であったことに注意しよう。

定理 (1.4) は Appendix (§8) で扱う。我々の本題は定理 (1.4) を証明するための重要な Key である定理 (2.1) (cf. §2) を論じることである。

§2. Statement of Main Theorem

以下 §3〜§6 で次の Main Theorem を証明する。但し基礎体を k とし、これ以降の § でも (Appendix も含めて) 常に、k を代数閉体とする。

定理(2.1): $\mathrm{char}(k) = 0$ とする。V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体とし、X を V 上の任意の ample 因子とする。Hilbert 多項式 $\chi(V, rX)$ を

$$\chi(V, rX) = d_0 \cdot r^n + d_1 \cdot r^{n-1} + \cdots + d_{n-1} r + d_n$$

の形に書き表わすとき、次の 3 条件をみたす r の実多項式 $Q = Q(r)$ が存在する。

(i) $\deg Q = n-1$;

(ii) $h^0(rX) \geqq \chi(V, rX) - Q(r)$ for every nonnegative integer r;

(iii) $Q(r)$ は (pair (V, X) のとり方によらず) Hilbert 多項式 $\chi(V, rX)$ だけによってきまる。(実はもっと強く、$Q(r)$ の各係数は、n をひとつ固定したときには、$d_0, d_1, \cdots, d_n$ の有理係数の多項式としてとれることもわかる。)

この定理の証明の outline を述べよう。$n=1$ のときは明らかなので $n \geqq 2$ を仮定する。まず小平の消滅定理によって u が正整数なら、$h^0(K_V+uX)=\chi(V, K_V+uX)$ は u の n 次式となり、最高次の係数は $(X^n)>0$ で零点は高々 n 個。よって $u \gg 1$ として $|K_V+uX| \neq \phi$ を得る。そこで u をひとつ固定して $|K_V+uX|$ の一般元を prime divisors の和 $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ と書く。但し、D_0 は variable part かつ $D_i\ (i \geqq 1)$ は fixed part。ここで、$T_{-1} := K_V+(u+r)X$ かつ各 $s\ (0 \leqq s \leqq \omega)$ に対して、$T_s := rX+(K_V+uX)-\sum_{i=0}^{s} D_i$ とおき、$T_{s-1}-D_s=T_s$ に注意すると、次の exact sequence を得る。

$$0 \to \mathcal{O}_V(T_s) \to \mathcal{O}_V(T_{s-1}) \to \mathcal{O}_{D_s}(T_{s-1}|D_s) \to 0 .$$

よって $h^0(T_s)-h^0(T_{s-1})+h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \geqq 0$。この不等式を $s=0,1,\cdots,\omega$ に対して和をとると、$T_\omega \sim rX$ であることから

$$h^0(rX)-h^0(K_V+(u+r)X)+\sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \geqq 0 .$$

よって nonnegative integer r に対し

$$h^0(rX) \geqq h^0(K_V+(u+r)X)-\sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)$$
$$=\chi(V, K_V+(u+r)X)-\sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)=\chi(V, rX)-(Q_1+Q_2)$$

where $Q_1 = \chi(V, rX) - \chi(V, K_V+(u+r)X)$, $Q_2 = \sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s+1}|D_s)$.
Q_1は明らかにrの$n-1$次式。またQ_2は$n-1$次元variety D_s上でのsectionの次元$h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)$をたしあわせたものでrの$n-1$乗のorderで上からおさえられることが期待される。もちろんそれには詳しい評価が必要で、次の§で証明される不等式等がessentialにきいてくる。以上が定理(2.1)の証明のoutlineである。

注意(2.2): 定理(2.1)と同じ仮定の下で、次の3条件をみたすrの多項式$P=P(r)$が存在することも容易にわかる(cf. §6)。

(i) $\deg P = n-1$;

(ii) $h^0(rX-K_V) \geq \chi(V, rX) - P(r)$ for every nonnegative integer r;

(iii) $P(r)$はpair (V, X)のとり方にはよらず多項式$\chi(V, rX)$だけによってきまる。

§3. 基本不等式

定理(3.1): $\mathrm{char}(k)\geqq 0$ かつ、V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体 $(n\geqq 2)$ とし、V 上で D を素因子、X を ample 因子とする。このとき、
(i) $K_V+(n+1)X$ は V 上 arithmetically effective。
(ii) $n=2$ とする。このとき K_V+2X+D は V 上 arithmetically effective (特に $(K_V+D+2X\circ D)\geqq 0$ が成立)。
(iii) $n=3$ とする。このとき V 上の任意の arithmetically effective divisor F に対し $(K_V+D+3X\circ D\circ F)\geqq 0$ が成りたつ (特に $(K_V+D+3X\bullet D\circ X)\geqq 0$)。

この定理で $\mathrm{char}(k)=0$ とし、かつ X に対する条件を少し弱めれば次の定理が成りたつ。

定理(3.2): $\mathrm{char}(k)=0$ かつ、V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体とし、D を V 上の素因子とする。X を V 上の因子で $(X^{n-1}\circ D)>0$ をみたし、しかもある正整数 m に対して $|mX|\neq\phi$ かつ $|mX|$ が base point をもたないとする。このと

き $(K_V+D+nX\circ D\circ X^{n-2})\geqq 0$ が成りたつ。

この2つの定理を証明するためにまず embedded resolution に関する次の定理を思い出す(正標数の場合は Abhyankar[1 ;9.1.3]を見よ)。

定理(3.3):(広中, Abhyankar). V を任意標数の体 k の上に定義された n 次元非特異射影多様体とし、D を V 上の素因子とする。更に char(k) >0 の場合は $n=3$ であることを仮定する。このとき n 次元非特異射影多様体 V' と birational morphism $g: V'\to V$ が存在して次の3条件をみたす。

1) g^{-1} is succession of monoidal transforms with irreducible nonsingular centers;

2) g は $g^{-1}(V-\mathrm{Sing}(D))$ を $V-\mathrm{Sing}(D)$ に isomorphic に写す;

3) D の g^{-1} による proper transform D' ($\subseteq V'$) は non-singular。

そこで次のことを考える。

命題(3.4): V, V', D, D', g を定理(3.3)と同様とする。このとき V 上の任意の因子 T、及び任意の arithmetically effective divisor F に対し

$$(K_V+D+T\circ D\circ F^{n-2}) \geqq (K_{V'}+D'+g^*(T)\circ D'\circ g^*(F)^{n-2}).$$

(3.4)の証明: 条件より、nonsingular center での blowing-up の列 $g_i: V_i \to V_{i-1}$, $i=1,2,\cdots,s$, が存在して $g=g_1\circ g_2\circ\cdots\circ g_s$, $V_s=V'$, $V_0=V$ と書ける。各 g_i の exceptional divisor を V' までひきあげたものを E_i とおく。$I=\{i \mid \dim(g_i \text{の center})=n-2\}$ とおけば

$$K_{V'}=g^*(K_V)+\sum_{i\in I}E_i+\sum_{j\notin I}a_jE_j \quad (\exists a_j\in\mathbb{Z}_+)$$

と書ける。一方、$g^*(D)=D'+\sum_{i\in I}b_iE_i+\sum_{j\notin I}c_jE_j$ と書けるが、b_i, c_j は正整数。従って

$$g^*(K_V+D)=K_{V'}+D'+\sum_{i\in I}(b_i-1)E_i+\sum_{j\notin I}(c_j-a_j)E_j.$$

さて、任意の正整数 m に対して $F+\frac{X}{m}$ は V 上の ample $\mathbb{Q}$-divisor。ところが $j\notin I$ なる j について g_j の center の次元は $n-2$ より小さいので、$E_j\circ g^*(F+\frac{X}{m})^{n-2}\equiv 0$ as a 1-cycle on V'。よって、

$$(K_V+D+T\circ D\circ (F+\tfrac{X}{m})^{n-2}) = (g^*(K_V+D+T)\circ g^*(D)\circ g^*(F+\tfrac{X}{m})^{n-2})$$
$$= (g^*(K_V+D)+g^*(T)\circ D'\circ g^*(F+\tfrac{X}{m})^{n-2})$$
$$= \Big((K_{V'}+D'+g^*(T)+\textstyle\sum_{i\in I}(b_i-1)E_i+\sum_{j\notin I}(c_j-a_j)E_j)\circ D'\circ g^*(F+\tfrac{X}{m})^{n-2}\Big)$$
$$= ((K_{V'}+D'+g^*(T)+\textstyle\sum_{i\in I}(b_i-1)E_i)\circ D'\circ g^*(F+\tfrac{X}{m})^{n-2})$$
$$\geqq (K_{V'}+D'+g^*(T)\circ D'\circ g^*(F+\tfrac{X}{m})^{n-2}).$$

ここで $m\to+\infty$ として $(K_V+D+T\circ D\circ F^{n-2})\geqq$ $(K_{V'}+D'+g^*(T)\circ D'\circ g^*(F)^{n-2})$ を得る。 Q.E.D.

いよいよ (3.1) と (3.2) の証明にはいる。

(3.1) の (i), (ii) の証明： V 上の任意の既約かつ reduced な曲線を Γ とする。 $0<\varepsilon\ll 1$ に対して

$$N_\varepsilon := \left\{ Z\ ;\ \begin{array}{l}\text{algebraic 1 cycle on } V \text{ with real coefficients}\\ \text{such that } (K_V\circ Z)\geqq -\varepsilon(X\circ Z)\leqq 0\end{array}\right\}$$

とおくと森 [10; 定理 1.4.2] によって

$$\Gamma = Z_\varepsilon + \textstyle\sum_{i=1}^{\nu} a_i l_i \quad \text{かつ} \quad 0<-(l_i\circ K_V)\leqq n+1,\ i=1,2,\cdots,\nu$$

をみたす $Z_\varepsilon\in N_\varepsilon$, $0<a_i\in\mathbb{R}$ および extremal rational curves l_i が存在する（但し、ν は 0 となることもあり得る）。

(i)： $(K_V+(n+1)X\circ\Gamma) = (K_V+(n+1)X\circ Z_\varepsilon)+\sum_{i=1}^{\nu} a_i(K_V+(n+1)X\circ l_i)$

$$\geqq (n+1-\varepsilon)(X\circ Z_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\nu} a_i\{(K_V\circ l_i)+(n+1)(X\circ l_i)\}$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{\nu} a_i\{(K_V\circ l_i)+(n+1)(X\circ l_i)\}$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{\nu} a_i(n+1)((X\circ l_i)-1) \geqq 0$$

よって $K_V+(n+1)X$ は V 上 arithmetically effective.

(ii): Γ に対して次の3つの場合にわける。

(case 1) $\Gamma = D$. このときは

$$(K_V+D+2X\circ\Gamma) = \deg(K_V+D)|_D + 2(X\circ D)$$
$$= \deg K_D + 2(X\circ D) = 2P_a(D)-2+2(X\circ D) \geqq 2P_a(D) \geqq 0.$$

(case 2) $V=\mathbb{P}^2$. このときは

$$(K_V+D+2X\circ\Gamma) = (-3+\deg_{\mathbb{P}^2}D+2\deg_{\mathbb{P}^2}X)\cdot\deg_{\mathbb{P}^2}\Gamma \geqq 0.$$

(case 3) $\Gamma \neq D$ かつ $V\neq\mathbb{P}^2$. この場合は

$$(K_V+D+2X\circ\Gamma) > (K_V+2X\circ\Gamma) = \left(K_V+2X\circ Z_\varepsilon+\sum_{i=1}^{\nu}a_i l_i\right)$$
$$\geqq (2-\varepsilon)(X\circ Z_\varepsilon) + \sum_{i=1}^{\nu} a_i(K_V+2X\circ l_i)$$
$$\geqq \sum_{i=1}^{\nu} a_i(K_V+2X\circ l_i)$$

ここで各 i について森[10;定理2.1]によって、次の@, ⓑのいずれかが成りたつ。

subcase @: V がある曲線上の $\mathbb{P}^1$-bundle で、しかも l_i はそのひとつの fibre である。

subcase ⓑ: l_i は V 上の第1種例外曲線である。

ところが@の場合は $(K_V\circ l_i)=-2$ なので、

$(K_V+2X\circ l_i)\geqq 0$ が、⑥ の場合は $(K_V\cdot l_i)=-1$ なので $(K_V+2X\circ l_i)\geqq 1$ が成りたち、結局次を得る。

$$(K_V+D+2X\circ\Gamma)\geqq 0\,.$$

以上 case 1, 2, 3 のいずれの場合にも K_V+D+2X は arithmetically effective。　Q.E.D.

(3.1) (iii) の証明：定理(3.3)の記号をつかう。このとき命題(3.4)により

$$(K_V+D+3X\circ D\circ F)\geqq (K_{V'}+D'+3g^*(X)\circ D'\circ g^*(F))\quad\cdots\cdots ①.$$

今 nonsingular surface D' 上に、g によって1点につぶれるような第1種例外曲線があれば、それを blow-down させる。こういった process をくり返して、nonsingular surface D'' および birational morphisms $h: D''\to D$, $\sigma: D'\to D''$ が存在し、次の2条件をみたす。

1) D'' 上には h によって1点につぶれるような第1種例外曲線は存在しない;

2) $g|D' = h\circ\sigma$.

そこで $X\circ D=X_D$, $F\circ D=F_D$ と書いて

$$(g|D')^*(F_D)=\sigma^*(h^*(F_D))\qquad \text{および}$$

$$K_{D'} = \sigma^*(K_{D''}) + E \quad \text{with} \quad \sigma_*(E) = 0$$

に注意すると $(K_{D'} \circ (g|_{D'})^*(F_D))_{D'} = (K_{D''} \circ h^*(F_D))_{D''}$ を得る。よって、

$$(K_{V'} + D' + 3g^*(X) \circ D' \circ g^*(F)) = (K_{D'} + 3(g|_{D'})^*(X_D) \circ (g|_{D'})^*(F_D))_{D'}$$

$$= (K_{D''} + 3h^*(X_D) \circ h^*(F_D))_{D''} \quad \cdots\cdots ②$$

ここで次の2つの場合にわけて考える。

(case 1) $D'' = \mathbb{P}^2$ のとき、この場合は

$$(K_{D''} + 3h^*(X_D) \circ h^*(F_D))_{D''} = 3(\deg_{\mathbb{P}^2} h^*(X_D) - 1) \cdot \deg_{\mathbb{P}^2} h^*(F_D)$$

$$\geqq 0 \quad \cdots\cdots ③$$

(case 2) $D'' \neq \mathbb{P}^2$ のとき、この場合、D''上の ample 因子 H をひとつ固定し、mを任意の正整数とすれば $H_m := h^*(X_D) + \frac{1}{m}H$ は D''上の ample $\mathbb{Q}$-divisor である。今、任意の $0 < \varepsilon \ll 1$ に対して

$$N''_\varepsilon := \left\{ \begin{array}{l} Z \,;\ \text{algebraic 1-cycle on } D'' \text{ with real coefficients} \\ \quad \text{such that } (K_{D''} \circ Z)_{D''} \geqq -\varepsilon (H_m \circ Z)_{D''} \leqq 0 \end{array} \right\}$$

とおくと、森 [10 ; 定理 1.4.2] によって

$$h^*(F_D) = Z_\varepsilon + \sum_{i=1}^{\mu} b_i l_i$$

をみたす $Z_\varepsilon \in N''_\varepsilon$, $0 < b_i \in \mathbb{R}$ および extremal rational curves l_i $(i = 1, 2, \cdots, \mu)$ が存在する（但し $\mu = 0$ のこともおこり得る）。よって

$$(K_{D''}+3H_m \circ h^*(F_D))_{D''} = (K_{D''}+3H_m \circ Z_\varepsilon + \textstyle\sum_{i=1}^{\mu} b_i l_i)$$
$$\geq (3-\varepsilon)(H_m \circ Z_\varepsilon)_{D''} + \textstyle\sum_{i=1}^{\mu} b_i (K_{D''}+3H_m \circ l_i)_{D''}$$
$$\geq \textstyle\sum_{i=1}^{\mu} b_i (K_{D''}+3H_m \circ l_i)_{D''} \geq \sum_{i=1}^{\mu} b_i (K_{D''}+3h^*(X_D) \circ l_i)_{D''}.$$

ここで各 i について森[10；定理2.1]によって、次の@，ⓑのいずれかが成りたつ。

subcase @：D'' がある曲線上の $\mathbb{P}^1$-bundle でしかも l_i はそのひとつの fibre である。
subcase ⓑ：l_i は D'' 上の第一種例外曲線である。

ところが @の場合は $(K_{D''} \circ l_i)_{D''} = -2$ かつ $(h^*(X_D) \circ l_i)_{D''} \geq 1$
ⓑの場合は $(K_{D''} \circ l_i)_{D''} = -1$ かつ $(h^*(X_D) \cdot l_i)_{D''} \geq 1$

が成りたつので、いずれの場合にも

$$(K_{D''}+3h^*(X_D) \circ l_i)_{D''} > 0$$

を得る。よって $(K_{D''}+3H_m \circ h^*(F_D))_{D''} \geq 0$。ここで $m \to +\infty$ とすることによって次の不等式が case 2 の場合にも成りたつ。

$$(K_{D''}+3h^*(X_D) \circ h^*(F_D))_{D''} \geq 0 \quad \text{-----④}$$

最後に①，②，③，④により、case 1, 2 いずれの場合にも $(K_V+D+3X \circ D \circ F) \geq 0$.　　Q.E.D.

(3.2)の証明：定理(3.3)の記号を使うと、命題

(3.4) から $(K_V + D + nX \circ D \circ X^{n-2}) \geq (K_{V'} + D' + ng^*(X) \circ D' \circ g^*(X)^{n-2})$ を得る。ところが $|mX|$ が base point free であることから $Tr_{D'}|mg^*(X)|$ も base point をもたず，よって

$$h^0(D', m(K_{V'} + D' + ng^*(X))|_{D'}) \neq 0 \quad \cdots\cdots ⑤$$

をいえば $(K_{V'} + D' + ng^*(X) \circ D' \circ g^*(X)^{n-2}) \geq 0$ が成りたち (3.2) の証明は終る。そこで⑤を示そう。

$$((g^*(X)|_{D'})^{n-1}) = ((X|_D)^{n-1}) = (X^{n-1} \circ D) > 0$$

に注意すると小平の消滅定理 (cf. 川又 [4]) により任意の正整数 t に対し，

$$\chi(D', K_{D'} + tg^*(X)|_{D'}) = h^0(D', K_{D'} + tg^*(X)|_{D'})$$
$$= h^0(D', (K_V + D' + tg^*(X))|_{D'})$$

であり，しかもこれらは t のきっかり $n-1$ 次の多項式なので、$1 \leqq t_0 \leqq n$ をみたす整数 t_0 が存在して $h^0(D', (K_{V'} + D' + t_0 g^*(X))|_{D'}) \neq 0$。ここで $h^0(D', m(n-t_0)g^*(X)|_{D'}) \neq 0$ に注意すると

$$m(K_{V'} + D' + ng^*(X))|_{D'} = m(K_{V'} + D' + t_0 g^*(X))|_{D'} + m(n-t_0)g^*(X)|_{D'}$$

により⑤を得る。　　　　　　　　　　Q.E.D.

§ 4. linear system と variable intersection cycle

この § では $\mathrm{Char}(k)$ は任意とし、いずれの V も k 上定義された (possibly singular) n 次元射影多様体だとする ($n \geqq 2$)。更に $k \subseteq \Omega$ とし、Ω を universal domain だとする。この § での我々の目標は定理 (4.9) であるが、その前に色々と準備をする。

定義 (4.1): Λ を k-rational Cartier divisors から成る空でない、V 上の linear system とする。$N = \dim \Lambda$ とおき $\Phi_\Lambda : V \to \mathbb{P}^N$ を Λ が定める rational map (defined over k) とする。そして H_i ($i = 1, 2, \cdots, s$) を $\mathbb{P}^N(\Omega)$ の $\sum_{j=1}^{N} u_j^{(i)} X_j = 0$ で定義される hyperplane とし、$u_j^{(i)} \in \Omega$ ($1 \leqq i \leqq s$, $1 \leqq j \leqq N$) を k 上 algebraically independent になるように十分一般に選んでおく。いま universal domain Ω 上で考える。正整数 s に対し (Ω 上) intersection-theoretically に定義された V 上の effective cycle $\Phi_\Lambda^*(H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_s)$ のことを $\Lambda^{[s]}$ と書き <u>variable</u> s-<u>fold</u> <u>intersection</u> <u>cycle</u> <u>of</u> Λ と呼ぶ。

もっと正確にいうと、$\Gamma (\subseteq V \times \mathbb{P}^N)$ を Φ_Λ の Graph とし、$pr_1 : \Gamma \to V$ (resp. $pr_2 : \Gamma \to \mathbb{P}^N$) を natural projection to the first (resp. second) factor とするとき

$$\Lambda^{[s]} = pr_{1*}(pr_2^*(H_1 \circ H_2 \circ \cdots \circ H_s))$$

とおく。更に $\Lambda^{[0]} = 1$ とする。ここで $\dim Im(\Phi_\Lambda) < s$ のとき $\Lambda^{[s]} = 0$ となることに注意せよ。

注意 (4.2): 1) $Bs\,\Lambda$ を Λ の base point 全体から成る V の部分集合とする。このとき $H_1, H_2, \cdots, H_s$ を十分一般にとることによって、$\Lambda^{[s]}$ のいかなる component も $Sing(V) \cup Bs\,\Lambda$ には含まれないと仮定してよい。

2) $\nu : \tilde{\Gamma} \to \Gamma$ を Γ の normalization とし、$\pi_i := pr_i \circ \nu$ $(i=1,2)$ とおく。$\pi_1^*\Lambda$ の fixed part を F とした時、

$$\pi_1^*\Lambda = F + \pi_2^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$$

と書ける。しかも set-theoretically に $\pi_1(F) = Bs\,\Lambda$。ここで $D_1, D_2, \cdots, D_{n-s}$ を V 上の任意の Cartier divisor としたとき

$$(D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_{n-s} \circ \Lambda^{[s]}) = (\pi_1^*(D_1) \circ \pi_1^*(D_2) \circ \cdots \circ \pi_1^*(D_{n-s}) \circ \pi_2^*(H)^s)$$

が成りたつ。但し H は $\mathbb{P}^N$ の任意の hyperplane。(singularity をもつ variety の上での intersection pairing については例えば Kleiman [5] を参照せよ。)

3) linear system Λ を universal domain Ω 上までひろげて考えて、その十分一般な元 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_s$ をとる。これらを $U := V - (Bs\Lambda \cup Sing(V))$ に制限したものは

$$Z_i|_U = pr_{1*}(pr_2^*(H_i))|_U, \quad i=1,2,\cdots,s,$$

の形に書ける。ところで pr_1 は $pr_1^{-1}(U)$ と U の isomorphism を induce するので $(Z_1|_U)\circ(Z_2|_U)\circ\cdots\circ(Z_s|_U) = \Lambda^{[s]}|U$。そこで $(Z_1|_U)\circ\cdots\circ(Z_s|_U) = \sum a_i\gamma_i$ ($a_i \in \mathbb{Z}_+$, $\gamma_i \subseteq U$) と成分の和 [redacted] の形に書くとき、1) により $\Lambda^{[s]} = \sum a_i\bar{\gamma}_i$ となっている。但し各 $\bar{\gamma}_i$ は γ_i の V における closure。

補題(4.3): V が normal (な n 次元射影多様体)であったとする。更に Λ を (k-rational) Cartier divisors から成る空でない V 上の linear system とする。$s = \dim Im(\Phi_\Lambda)$ とおき、更に X を V 上の任意の ample Cartier 因子としたとき次が成立する。

$$\dim \Lambda \leqq (X^{n-s} \circ \Lambda^{[s]}) + s - 1.$$

(4.3)の証明: $s=0$ のときは明らかなので、$s \geqq 1$ と仮定する。$Im(\Phi_\Lambda)$ は $\mathbb{P}^N$（但し $N = \dim \Lambda$）の closed subvariety で、しかも如何なる hyperplane にも含まれないので、

$$N \leqq \deg_{\mathbb{P}^N} Im(\Phi_\Lambda) + s - 1 = (Im(\Phi_\Lambda) \circ H_1 \circ \cdots \circ H_s) + s - 1$$

となることがよく知られている。ところが、X は ample であるから

$$(Im(\Phi_\Lambda) \circ H_1 \circ \cdots \circ H_s) \leqq (X^{n-s} \circ \Phi_\Lambda^*(H_1 \circ \cdots \circ H_s)) = (X^{n-s} \circ \Lambda^{[s]}).$$

よって $N \leqq (X^{n-s} \circ \Lambda^{[s]}) + s - 1$。　　　Q. E. D.

補題 (4.4): (4.3)と同じ条件のもとに、更に Λ' を Λ の任意の linear subsystem とすれば、$0 \leqq i \leqq n$ をみたす整数 i に対して

$$(X^{n-i} \circ \Lambda^{[i]}) \geqq (X^{n-i} \circ \Lambda'^{[i]}).$$

(4.4)の証明: $(X^{n-i} \circ \Lambda'^{[i-\alpha]} \circ \Lambda^{[\alpha]}) \geqq (X^{n-i} \circ \Lambda'^{[i-\alpha+1]} \circ \Lambda^{[\alpha-1]})$ を各 $\alpha = 1, 2, \cdots, i$ に対して示せばよい。Γ ($\subseteq V \times \mathbb{P}^N$) を Φ_Λ の Graph, Γ' ($\subseteq V \times \mathbb{P}^{N'}$) を $\Phi_{\Lambda'}$ の Graph

とし、$\nu : \widetilde{\Gamma} \to \Gamma \times_V \Gamma'$ を $\Gamma \times_V \Gamma'$ の normalization とする。そして $p : \widetilde{\Gamma} \to V$, $q : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{P}^N$, $q' : \widetilde{\Gamma} \to \mathbb{P}^{N'}$ を natural projections としたとき、

$$p^*\Lambda = F + q^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$$
$$p^*\Lambda' = F' + q'^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N'}}(1)|$$

と書ける。ここで $F' - F =$ ($p^*\Lambda'$ の fixed part) − ($p^*\Lambda$ の fixed part) = effective divisor なので、H, H' をそれぞれ $\mathbb{P}^N$, $\mathbb{P}^{N'}$ の hyperplane としたとき、$q^*H \sim q'^*H' +$ effective divisor。よって、

$$(X^{n-i} \circ \Lambda'^{[i-\alpha]} \circ \Lambda^{[\alpha]}) - (X^{n-i} \circ \Lambda'^{[i-\alpha+1]} \circ \Lambda^{[\alpha-1]})$$
$$= ((p^*X)^{n-i} \circ (q'^*H')^{i-\alpha} \circ (q^*H)^{\alpha}) - ((p^*X)^{n-i} \circ (q'^*H')^{i-\alpha+1} \circ (q^*H)^{\alpha-1})$$
$$= ((p^*X)^{n-i} \circ (q'^*H')^{i-\alpha} \circ (q^*H)^{\alpha-1} \circ (q^*H - q'^*H'))$$
$$= ((p^*X)^{n-i} \circ (q'^*H')^{i-\alpha} \circ (q^*H)^{\alpha-1} \circ (\text{effective divisor})) \geq 0.$$

但し、最後の不等号では、p^*X, q'^*H', q^*H が $\widetilde{\Gamma}$ 上 arithmetically effective であることを使った。

Q.E.D.

この (4.4) の不等式で、適当な i に対しては、等号が成りたたずに strict な不等式となっている Λ' がある。例えば、

補題(4.5): (4.3)と同じ条件のもとに、更に、$\dim \mathrm{Im}(\Phi_\Lambda) = n$ を仮定する。A を V の prime divisor で、しかも Λ の fixed component でないとする。更に Φ_Λ による A の proper image $\Phi_\Lambda(A)$ の次元 r が $r<n-1$ をみたすとする。B を $\Phi_{\Lambda|A}$ の general fibre とすれば

(a) $\dim B = n-1-r$;

(b) $\bar{\Lambda} := \{ Z \in \Lambda \mid \mathrm{Supp}(Z) \supseteq \mathrm{Supp}(B) \}$ は Λ の linear subsystem でしかも $\dim \bar{\Lambda} = \dim \Lambda - 1$ をみたす;

(c) $(X^{n-1-r} \circ \Lambda^{[r+1]}) - (X^{n-1-r} \circ B) \geq (X^{n-1-r} \circ \bar{\Lambda}^{[r+1]})$。

(4.5)の証明: (a)は clear. 次に $Z \in \Lambda$ が $\bar{\Lambda}$ に属する条件は、対応する $\mathbb{P}^N$ の hyperplane が1点 $\Phi_\Lambda(B)$ を通る条件であることから、次の2つのことがいえる。

1) $\bar{\Lambda}$ の次元は Λ の次元から丁度1だけさがる。即ち(b)がいえた;

2) infinitely near な base point も含めて、しかも multiplicity もこめた、強い意味で、($\bar{\Lambda}$ の base locus) $=$ (Λ の base locus) $\cup B$。

さて(c)を証明するためにΛ, $\bar{\Lambda}$ を universal domain Ω までひろげたところで考える。$\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2, \cdots, \bar{Z}_{r+1}$ を $\bar{\Lambda}$ の一般元とすると、各 $\mathrm{Supp}(\bar{Z}_i) \supseteq B$。よって上の 2) より、$Bs\,\Lambda$ の外側で、

$$\bar{Z}_1 \circ \bar{Z}_2 \circ \cdots \circ \bar{Z}_{r+1} = \alpha \cdot B + \text{effective cycle}, \quad (\alpha \geqq 1),$$

となる。ここで $B \subseteq Bs\,\bar{\Lambda}$ なので $\bar{\Lambda}^{[r+1]}$ は $\alpha \cdot B$ なる component は含まない。一方、$B \nsubseteq Bs\,\Lambda \cup \mathrm{Sing}(V)$ により、$\Lambda^{[r+1]}$ (の specialization) は $\alpha \cdot B$ なる component を含んでいるとしてよい。従って (c) を得る。

注意: (4.5) の (c) の部分の証明は detail まできちんと書けば、上よりは少々煩雑である。

補題 (4.6): (4.3) と同じ条件のもとに、E を Λ の任意の元とする。このとき $0 \leqq i \leqq n$ なる任意の整数 i に対して次の不等式が成りたつ。

$$(X^{n-i} \circ \Lambda^{[i]}) \leqq (X^n) \cdot \left((X^{n-1} \circ E) / (X^n) \right)^i.$$

(4.6) の証明: <u>Step</u> 1: $i=0$ のときは明らかなので、$i \geqq 1$ とする。(4.2) の 2) と同様の記号を使

うと、$\pi_1^*\Lambda$ の fixed part を F としたとき、

$$\pi_1^*\Lambda = F + \pi_2^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|$$

が $\widehat{\Gamma}$ 上で成りたつ。よって H を $\mathbb{P}^N$ の hyperplane とすると、$\pi_1^*E \sim F + \pi_2^*H$。いま $\widetilde{X} := \pi_1^*(X)$ かつ $\widetilde{H} := \pi_2^*(H)$ とおくと、(4.2) の 2) から、

$$(X^{n-i} \circ \Lambda^{[i]}) = (\widetilde{X}^{n-i} \circ \widetilde{H}^i)。$$

一方、$(X^{n-1} \circ E) = (\widetilde{X}^{n-1} \circ \pi_1^*E) = (\widetilde{X}^{n-1} \circ F) + (\widetilde{X}^{n-1} \circ \widetilde{H})$ $\geqq (\widetilde{X}^{n-1} \circ \widetilde{H})$ が成りたつので、各 $i = 1, 2, \cdots, n$ に対し、

$$(\widetilde{X}^{n-i} \circ \widetilde{H}^i) \leqq (\widetilde{X}^n) \cdot \left((\widetilde{X}^{n-1} \circ \widetilde{H})/(\widetilde{X}^n)\right)^i \cdots\cdots \text{①}$$

を示せば証明は終る。

<u>Step</u> 2：$\widehat{\Gamma}$ 上の ample divisor A をひとつとってくる。$\widetilde{X}, \widetilde{H}$ ともに $\widehat{\Gamma}$ 上で arithmetically effective なので、$\widetilde{X}_\alpha := \widetilde{X} + \frac{1}{\alpha}A$, $\widetilde{H}_\alpha := \widetilde{H} + \frac{1}{\alpha}A$, $\alpha = 1, 2, \cdots,$ とおくと、$\widetilde{X} = \lim_{\alpha\to\infty} \widetilde{X}_\alpha$, $\widetilde{H} = \lim_{\alpha\to\infty} \widetilde{H}_\alpha$ と ample $\mathbb{Q}$-divisors の limit の形に書ける。よって整数 i を $2 \leqq i \leqq n$ をみたすように任意に固定したとき、$\widehat{\Gamma}$ 上の irreducible reduced surface の列 S_α, $\alpha = 1, 2, \cdots,$ と正整数の列 λ_α, $\alpha = 1, 2, \cdots$ が存在して、$\widehat{\Gamma}$ 上で

$$S_\alpha \equiv \lambda_\alpha \cdot \tilde{X}_\alpha^{n-i} \circ \tilde{H}_\alpha^{i-2}$$

が成りたつようにできる。$j_\alpha : S'_\alpha \to S_\alpha$ を S_α の desingularization とし、$X'_\alpha := j_\alpha^*(\tilde{X}_\alpha | S_\alpha)$, $H'_\alpha := j_\alpha^*(\tilde{H}_\alpha | S_\alpha)$ とおくと、X'_α は S'_α 上で arithmetically effective かつ $(X'^2_\alpha) = \lambda_\alpha (\tilde{X}_\alpha^{n-i+2} \cdot \tilde{H}_\alpha^{i-2}) > 0$ が成りたつので、Hodge index theorem により、

$$(X'^2_\alpha) \cdot (H'^2_\alpha) \leqq (X'_\alpha \circ H'_\alpha)^2$$

を得る。よって $(\tilde{X}_\alpha^2 \circ S_\alpha) \cdot (\tilde{H}_\alpha^2 \circ S_\alpha) \leqq (\tilde{X}_\alpha \circ \tilde{H}_\alpha \circ S_\alpha)^2$。
両辺を $(\lambda_\alpha)^2$ で割って次の不等式を得る。

$$(\tilde{X}_\alpha^{n-i+2} \circ \tilde{H}_\alpha^{i-2}) \cdot (\tilde{X}_\alpha^{n-i} \circ \tilde{H}_\alpha^{i}) \leqq (\tilde{X}_\alpha^{n-i+1} \circ \tilde{H}_\alpha^{i-1})^2, \quad i = 2, 3, \cdots, n.$$

これは $\tau_i := (\tilde{X}_\alpha^{n-i} \circ \tilde{H}_\alpha^{i}) / (\tilde{X}_\alpha^{n-i+1} \circ \tilde{H}_\alpha^{i-1})$ とおくとき $\tau_i \leqq \tau_{i-1}$ を意味する。故に $\tau_i \leqq \tau_{i-1} \leqq \cdots \leqq \tau_1$。
これから $(\tilde{X}_\alpha^{n-i} \circ \tilde{H}_\alpha^{i}) \leqq (\tilde{X}_\alpha^{n-i+1} \circ \tilde{H}_\alpha^{i-1}) \cdot \tau_1$。よってこれを inductive に使うと、

$$(\tilde{X}_\alpha^{n-i} \circ \tilde{H}_\alpha^{i}) \leqq (\tilde{X}_\alpha^{n}) \cdot \tau_1^{i} = (\tilde{X}_\alpha^{n}) \left((\tilde{X}_\alpha^{n-1} \circ \tilde{H}_\alpha) / (\tilde{X}_\alpha^{n}) \right)^{i}.$$

ここで $\alpha \to +\infty$ とすることにより ① 式を得る。

Q.E.D.

注意 (4.7): 上の Step 2 と全く同じ議論で、次のことがいえる:

Wを (possibly singular) n次元射影多様体とし、A および B を W上の arithmetically effective Cartier divisors とする。更に $(A^n) > 0$ を仮定する。このとき $1 \leqq i \leqq n$ なる任意の i に対して

$$(A^{n-i} \circ B^i) \leqq (A^n) \cdot \left((A^{n-1} \circ B) / (A^n) \right)^i .$$

補題(4.8)：(4.3)と同じ条件のもとに、更に Λ' を Λ の linear subsystem で、Λ の元 E に対し、不等式

$$\begin{cases} \dim \Lambda' \geqq (X^n) \cdot \left((X^{n-1} \circ E) / (X^n) \right)^{n-1} + n - 1 \\ (X^{n-1} \circ E) / (X^n) \geqq 1 \end{cases}$$

を同時にみたしているとする。このとき、

$\dim \mathrm{Im}(\Phi_{\Lambda'}) = n$。

(4.8)の証明：背理法を使う。もし $s := \dim \mathrm{Im}(\Phi_{\Lambda'})$ が $s < n$ をみたしていたと仮定すれば、

$$\begin{aligned} \dim \Lambda' &\leqq (X^{n-s} \circ \Lambda'^{[s]}) + s - 1 & [\because (4.3)] \\ &\leqq (X^{n-s} \circ \Lambda^{[s]}) + s - 1 & [\because (4.4)] \\ &\leqq (X^n) \cdot \left((X^{n-1} \circ E) / (X^n) \right)^s + s - 1 & [\because (4.6)] \\ &< (X^n) \cdot \left((X^{n-1} \circ E) / (X^n) \right)^{n-1} + n - 1 & [\because s < n]. \end{aligned}$$

これは矛盾。 Q.E.D.

さて、d を正整数とし、t の $n-1$ 次多項式 $R_n(t)$, $R_n''(t)$ と t の n 次多項式 $R_n'(t)$, $R_n^*(t)$ を次のように定義する。

$$R_n(t) = d\left(\sum_{i=1}^{n-1} t^i\right)$$

$$R_n'(t) = \frac{d}{n!+1}t^n + d\cdot t$$

$$R_n''(t) = \left(d + \frac{1}{n!+1}\right)t^{n-1} + n$$

$$R_n^*(t) = R_n(t) + R_n'(t) + R_n''(t).$$

定理(4.9)： V を非特異(n 次元射影多様体)とし、X を V 上の ample 因子とする。E を V 上の因子で $t := (X^{n-1}\circ E)/(X^n)$ が $t \geqq 1$ をみたすとする。更に $d = (X^n)$ とおき、

$$\dim |E| \geqq R_n^*(t)$$

が成りたっているとする。このとき $|E|$ の適当な linear ~~system~~ subsystem Λ が存在して、次の5条件をみたす。

(a) $\dim Im(\Phi_\Lambda) = n$;

(b) Φ_Λ は V 上の如何なる prime divisor D も contract しない、即ち D の proper image $f(D)$ の次元は常に $n-1$;

(c) V 上の如何なる prime divisor D に対しても

$$\dim Tr_D(\Lambda_{var}) \geqq \frac{t^{n-1}}{n!+1} + 1$$

但し、Λ_{var} は Λ の variable part のことを意味するとする；

(d) Λ_{var} の一般元は irreducible reduced；

(e) $\dim \Lambda \geqq R_n''(t)$.

(4.9) の証明： Step 1： この Step では 3 条件 (a), (b), (c) をみたす Λ の存在をいおう。そのために $|E|$ の linear subsystem $\Lambda(v, w)$ （但し v, w は non-negative integers）で $\dim \Lambda(v, w) \geqq d \cdot t^{n-1} + n - 1$ をみたすものを次のように inductive に定義する。まず $\Lambda(0,0) = |E|$ とおくと、$\dim \Lambda(0,0) \left(\geqq R_n^*(t)\right) \geqq d \cdot t^{n-1} + n - 1$ は条件から明らか。そこで $\Lambda(v, w)$ が定義されたとする。（このとき $\Lambda(v, w)$ で定義される rational map $f_{v,w} := \Phi_{\Lambda(v,w)}$ は補題 (4.8) により $\dim Im(f_{v,w}) = n$ をみたす。）よって、もし $\Lambda(v, w)$ が (b) の条件も (c) の条件もみたすとすると Step 1 は終ってしまうので、(b) か (c) が満たされないとしてよい。

はじめに (b) がみたされないとする。即ちある prime divisor A があって、$f_{v,w}$ によって contract されるとする。A の proper image $f_{v,w}(A)$ の general point を q とし、$\Lambda(v,w) = \Lambda(v,w)_{var} + F$ の形に $\Lambda(v,w)$ をその variable part $\Lambda(v,w)_{var}$ と fixed part F とにわける。$\Lambda(v+1, w) := \{ Z + F \mid Z \in \Lambda(v,w)_{var}$ は $\mathrm{Supp}(Z) \supseteq (f_{v,w}|A)^{-1}(q)$ をみたす $\}$ とおけば (4.5) により、

$$\dim \Lambda(v+1, w) = \dim \Lambda(v,w) - 1$$

$$\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v+1,w)^{[i]}) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v,w)^{[i]})\right) - 1 .$$

こうして $\Lambda(v+1,w)$ を定義するのを type I の operation とよぶ。

次に (b) がみたされて (c) がみたされないとする。このとき V 上の prime divisor D で

$$\dim Tr_D(\Lambda(v,w)_{var}) \leqq \frac{t^{n-1}}{n!+1}$$

となるものがある。そこで $\Lambda(v, w+1) := \{ Z + F \mid Z \in \Lambda(v,w)_{var}$ は $\mathrm{Supp}(Z) \supseteq D$ をみたす $\}$ とおいてできる vector space の完全列

$$0 \to \Lambda(v, w+1) \to \Lambda(v,w) \to Tr_D(\Lambda(v,w)_{var}) \to 0$$

を考える。$\dim Tr_D(\Lambda(v,w)_{var})$ は linear system としての次元であって $Tr_D(\Lambda(v,w)_{var})$ を vector space と

してみたときの次元より1だけ小さいので

$$\dim \Lambda(v, w+1) \geqq \dim \Lambda(v, w) - \frac{t^{n-1}}{n!+1} - 1$$
$$\geqq d \cdot t^{n-1} + n - 1 - \frac{t^{n-1}}{n!+1} - 1$$
$$> 0 \quad [\because n \geqq 2]。$$

よって $\Lambda(v, w+1) \neq \phi$ であり、こうして $\Lambda(v, w+1)$ を定義するのを type II の operation とよぶ。この type II の operation の場合も $\Lambda(v, w+1)$ の fixed part として、$\Lambda(v, w)$ の fixed part F のほかに、更に D が加わるので、補題(4.5)と同様の議論により

$$(X^{n-1} \circ \Lambda(v, w+1)) \leqq (X^{n-1} \circ \Lambda(v, w)) - 1,$$

これと(4.4)から次の不等式を得る。

$$\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v, w+1)^{[i]}) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v, w)^{[i]})\right) - 1.$$

以上の2つの operation の考察から、そもそも $\Lambda(v, w)$ は次の不等式を同時にみたしていなければならない。

$$\dim \Lambda(v, w) \geqq \dim |E| - v - w\left(\frac{t^{n-1}}{n!+1} + 1\right) \quad \cdots\cdots ①$$

$$0 \leqq \sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ \Lambda(v, w)^{[i]}) \leqq \left(\sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ |E|^{[i]})\right) - v - w \quad \cdots\cdots\cdots ②$$

特に $v \leqq \sum_{i=1}^{n-1} (X^{n-i} \circ |E|^{[i]}) \leqq R_n(t)$ $[\because (4.6)]$。一方 $\Lambda(v, w)$ の fixed part は重複度をこめて少くとも

w 個の component を含んでいるから、$w \leqq (X^{n-1} \circ E) = d \cdot t$ が成りたつ。故に①式から更に次の不等式を得る。

$$\dim \Lambda(v, w) \geqq \dim |E| - R_n(t) - R_n'(t)$$
$$\geqq R_n''(t) \quad \cdots\cdots\cdots ③$$

従って type I の operation の場合、

$$\dim \Lambda(v+1, w) \geqq R_n''(t) - 1 \geqq d \cdot t^{n-1} + n - 1,$$

type II の operation の場合も、

$$\dim \Lambda(v, w+1) \geqq R_n''(t) - \frac{t^{n-1}}{n!+1} - 1 = d \cdot t^{n-1} + n - 1$$

が成りたち、inductive procedure は well-defined である。しかも②式は我々の process が有限回で終ってしまうことを示しているので step 1 は完了した。

step 2： いったん step 1 で (a), (b), (c) をみたす Λ ($= \Lambda(v, w)$ for some v, w) が得られれば、③により、$\dim \Lambda \geqq R_n''(t)$ 即ち (e) もみたしていることは明らか。

step 3： かくして4条件 (a), (b), (c), (e) をみたすような Λ が得られたが（これを $\bar{\Lambda}$ と書くことにする）、この4条件のほかに更に (d) もみた

すようなΛをみつけよう。次の2つの場合にわける。

(case 1) $\mathrm{char}(k)=0$. このときは $\dim \mathrm{Im}(\Phi_{\overline{\Lambda}})=n \geqq 2$ なので Bertini の定理により、$\overline{\Lambda}_{var}$ の一般元は irreducible reduced. 即ち $\overline{\Lambda}$ 自身が条件 (d) もみたす。

(case 2) $\mathrm{char}(k)=p>0$. この場合も $\dim \mathrm{Im}(\Phi_{\overline{\Lambda}})=n \geqq 2$ なので $\overline{\Lambda}_{var}$ は pencil と compose しない。よって $\overline{\Lambda}_{var}$ の一般元は $p^{\alpha}\cdot$(prime divisor on V) の形に書ける（但し $\alpha\in\mathbb{Z}_+\cup\{0\}$）。そこで $\Lambda_0:=\{D\in \mathrm{Div}(V)\,;\,p^{\alpha}\cdot D\in\overline{\Lambda}_{var}\}$ とおくと、体 k のある Frobenius automorphism に induce された rational map φ が存在して、$\Phi_{\overline{\Lambda}}=\varphi\circ\Phi_{\Lambda_0}$ と書ける。F を linear system $\overline{\Lambda}$ の fixed part とし、V 上の linear system Λ を

$$\Lambda := \underbrace{\Lambda_0+\Lambda_0+\cdots+\Lambda_0}_{p^{\alpha}\text{個}}+F$$

と定義すれば、Λ は $|E|$ の linear subsystem で、しかも Λ_{var} の一般元は irreducible reduced, 即ち条件 (d) をみたす。$\Lambda_{var}=\underbrace{\Lambda_0+\cdots+\Lambda_0}_{p^{\alpha}\text{個}}\geqq\overline{\Lambda}_{var}$ なので、Λ が条件 (a), (b), (c), (e) をみたすことも明らか。 Q.E.D.

§5. linear system に関する松阪の定理

この§では k は任意標数とし、V は k 上定義された n 次元非特異射影多様体 $(n \geqq 2)$ とする。そして X を V 上の ample 因子、E を V 上の arithmetically effective divisor とし、$t := (X^{n-1} \circ E)/(X^n)$, $\tau := (X^{n-2} \circ E^2)$ とおいたとき

$$\frac{t^{n-1}}{n!+1} > n-3 \quad \text{かつ} \quad \tau > 0$$

が成りたっているとする。しかも Λ を complete linear system $|E|$ の空でない subsystem で次の 4 条件をみたすとする。

(a) $\dim Im(\Phi_\Lambda) = n$;

(b) Φ_Λ は V 上の如何なる prime divisor D も contract しない，即ち D の proper image $f(D)$ の次元は常に $n-1$;

(c) V 上の如何なる prime divisor D に対しても

$$\dim Tr_D(\Lambda_{var}) \geqq \frac{t^{n-1}}{n!+1} + 1 \ ;$$

(d) Λ_{var} の一般元は irreducible reduced 。

このとき我々の目標は次の定理を証明することである。

定理 (5.1)： M を V 上の任意の arithmetically effective divisor とする。そして

$$\alpha := \frac{((n-1)!+1)^{n-2}\,\tau^{n-2}\cdot d\cdot t}{\frac{t^{n-1}}{n!+1} - n + 3}$$

$$\beta := \frac{((n-1)!+1)^{n-2}\,\tau^{n-2}\cdot \sigma}{\frac{t^{n-1}}{n!+1} - n + 3}$$

とおく。但し $d := (X^n)$ かつ $\sigma := (X^{n-2}\circ M \circ E)$. 更に

$$Q_1(r) := 1 + \{\tau((n-1)!+1)(\alpha r+\beta+1)\}^{n-2}\cdot(\sigma + d\cdot t\cdot r)$$

とおくとき、

$$h^0(M+rX-E) \geqq h^0(M+rX) - d\cdot t\cdot Q_1(r)$$

が任意の nonnegative integer r に対して成りたつ。

定理 (5.1) を証明するために、まず次のようなことを考える：

Λ の一般元を prime divisors の和 $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ と書き表わす。但し $D_0 \in \Lambda_{var}$ とし、かつ $\sum_{i=1}^{\omega} D_i$ を Λ の fixed part とする。そこで任意の nonnegative integer

r をとり、

$$\begin{cases} T_{-1} := M + rX \\ T_s := M + rX - \sum_{i=0}^{s} D_i \qquad (0 \leqq s \leqq \omega) \end{cases}$$

とおく。このとき $T_s = T_{s-1} - D_s$ に注意すると

$$0 \to \mathcal{O}_V(T_s) \to \mathcal{O}_V(T_{s-1}) \to \mathcal{O}_{D_s}(T_{s-1}|D_s) \to 0 \qquad (\text{exact})$$

から long exact sequence

$$0 \to H^0(T_s) \to H^0(T_{s-1}) \to H^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \to \cdots\cdots$$

を得る。よって

$$h^0(T_s) - h^0(T_{s-1}) + h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \geqq 0.$$

これを $s=0, 1, \cdots, \omega$ について和をとれば

$$h^0(T_\omega) - h^0(T_{-1}) + \sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \geqq 0.$$

ここで $T_{-1} = M + rX$, $T_\omega \sim M + rX - E$ なので次の不等式を得る。

(5.2): $$h^0(M+rX-E) \geqq h^0(M+rX) - \sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s).$$

そこで $\sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)$ を上から評価することが必要になってくる。そのために、いくつかの準備をする。

補題(5.3): W を normal な l 次元射影多様体 $(l \geqq 2)$

とし、A を W 上の $(A^\ell) > 0$ をみたす arithmetically effective な Cartier 因子とする。また Z を W 上の Cartier 因子で，$m \gg 1$ なる正整数 m に対して，$|mZ|$ が空でなく，fixed component ももたず，しかも pencil でも compose されないとする。更にもしある正数 v に対して

$$v \cdot (A^\ell) \geqq (A^{\ell-1} \circ Z)$$

が成りたつとする。このとき $(\ell!+1)vA - Z$ は <u>pseudo-effective</u> である，即ち，任意の generically finite な全射 $p: W' \to W$ （但し W' は projective variety）と、W' の任意の arithmetically effective Cartier divisors $D_1, D_2, \cdots, D_{\ell-1}$ に対して、次の不等式が成りたつ。

$$\left(((\ell!+1)v\,p^*(A) - p^*(Z)) \circ D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_{\ell-1}\right) \geqq 0 .$$

(5.3)の証明： <u>Step 1</u>： この Step では，A が更に W 上 ample であったと仮定する。このとき，上の(5.3)の statement が正しいことを示そう。そこで $e_0 = \dfrac{v^\ell (A^\ell)}{\ell!}$ とおく。更に、$g \gg 1$ なる整数 g をとり、$y = (\ell!+1)g$ とおく。このとき

$$\chi(W, yvA) = e_0 y^\ell + e_1 y^{\ell-1} + \cdots + e_\ell .$$

しかも $((vA)^{\ell}) \geqq ((vA)^{\ell-1} \circ Z)$ に注意すると

$$e_0 \geqq \frac{((vA)^{\ell-1} \circ Z)}{\ell!} > \frac{((vA)^{\ell-1} \circ Z)}{\ell! + 1}.$$

従って $y \gg 1$ により $e_0 y^{\ell} > ((yvA)^{\ell-1} \circ \frac{y}{\ell!+1} Z)$. ところが両辺ともに y の ℓ 次式なので lower degree terms をつけ加えても不等号はかわらない。よって

$$\chi(W, yvA) > ((yvA)^{\ell-1} \circ \frac{y}{\ell!+1} Z) + \ell - 1.$$

一方 $y \gg 1$ より、A の ampleness から $\chi(W, yvA) = h^0(yvA)$. 故に

$$h^0(yvA) > ((yvA)^{\ell-1} \circ gZ) + \ell - 1 \text{ ------ ①}.$$

さて B を $|gZ|$ の一般元とすると、仮定より Bertini の定理を使い、B は irreducible reduced。ここで $h^0(yvA - B) \neq 0$ ------ ② を claim する。背理法をつかって $h^0(yvA - B) = 0$ を仮定する。このとき long exact sequence

$$0 \to H^0(yvA - B) \to H^0(yvA) \to H^0(B, (yvA)|_B) \to \cdots\cdots$$

から $h^0(yvA) \leq h^0(B, (yvA)|_B)$ を得る。ところが $y \gg 1$ により B は射影空間 $\mathbb{P}(H^0(B, (yvA)|_B))$ に subvariety として embed され、しかもいかなる hyperplane にも含まれない。よって（補題

(4.3) と同様にして)

$$\left((y v A)^{\ell-1} \circ B \right) + \ell - 1 \geqq h^0(B, (yvA)_{|B}) \quad (\geqq h^0(yvA))$$

を得るが、これは① に反し不合理。故に②が成りたつ。$yvA \sim B + F$ (即ち、$(\ell!+1) g v A \sim g Z + F$) をみたすような effective divisor F が存在するので、$(\ell!+1) v A - Z$ が pseudo-effective となることは明らか。

Step 2: いよいよ一般の場合を考える。そこで W' 上の ample Cartier 因子 H' をひとつ固定する。$\nu = 1, 2, \cdots$ に対して $A'_\nu := p^*(A) + \frac{1}{\nu} H'$ とおいたとき、$\nu \cdot A'_\nu$ が W' 上の ample Cartier 因子であることに注意する。$\varepsilon > 0$ を任意にひとつ固定しよう。このとき $\nu \gg 1$ とすれば.

$$\begin{aligned} &\frac{v+\varepsilon}{\nu} \cdot \left((\nu \cdot A'_\nu)^\ell \right) - \left((\nu \cdot A'_\nu)^{\ell-1} \circ p^*(Z) \right) \\ &= \Big((v+\varepsilon) \cdot (A^\ell) - (A^{\ell-1} \circ Z) \Big) \cdot \nu^{\ell-1} + \text{lower degree terms of } \nu \\ &\geqq 0 . \end{aligned}$$

よって Step 1 により、W'上の任意の arithmetically effective Cartier divisors $D_1, D_2, \cdots, D_{\ell-1}$ に対して.

$$\left(\left\{ (\ell!+1) \cdot \frac{v+\varepsilon}{\nu} \cdot (\nu \cdot A'_\nu) - p^*(Z) \right\} \circ D_1 \circ D_2 \circ \cdots \circ D_{\ell-1} \right) \geqq 0$$

が成立する。ここで $\nu \to +\infty$ とすることにより

$$\left(\left(\left((\ell!+1)\cdot(v+\varepsilon)p^*(A)-p^*(Z)\right)\right)\circ D_1\circ D_2\circ\cdots\circ D_{\ell-1}\right)\geqq 0$$

を得る。更に $\varepsilon\to 0$ として求める不等式を得る。 Q.E.D.

補題(5.4)：各 $s\in\{0,1,\cdots,\omega\}$ に対して、D_s^* を rational map $\Phi_\Lambda|D_s$ の Graph の normalization とする。また、$\pi_s : D_s^*\to D_s$ を natural projection とする。このとき次のことが成りたつ。

(a) $\Lambda_s := Tr_{D_s}(\Lambda_{var})$ かつ $\Lambda_s^* := \pi_s^*\Lambda_s$ とおくとき Λ_s^* の variable part $\Lambda_{s,var}^*$ は base point をもたない。

(b) $h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)\leqq h^0(D_s^*, \pi_s^*(T_{s-1}|D_s))$。

(c) Z_s^* を $\Lambda_{s,var}^*$ の一般元とする。更に $X_s^* := \pi_s^*(X|D_s)$ とおくとき、$((n-1)!+1)\tau X_s^* - Z_s^*$ は D_s^* 上で pseudo-effective。

(5.4)の証明：(a), (b)は明らかなので(c)のみを考える。Λ_sの一般元をZ_sとするとき、

$$(Z_s^*\circ(X_s^*)^{n-2})\leqq(\pi_s^*(Z_s)\circ\pi_s^*(X|D_s)^{n-2})$$
$$=(D_0|D_s\circ(X|D_s)^{n-2})=(D_0\circ D_s\circ X^{n-2})$$
$$\leqq(D_0\circ\textstyle\sum_{i=0}^{\omega}D_i\circ X^{n-2})=(D_0\circ E\circ X^{n-2})$$

$$\leqq (E^2 \circ X^{n-2}) \qquad [\because E \text{ is arithmetically effective}]$$
$$= \tau \leqq \tau(D_s \circ X^{n-1}) = \tau((X_s^*)^{n-1}) \quad \cdots\cdots ③$$

ここで次の２つの場合にわけて考える。

(case 1) $n \geqq 3$. このときは $m \gg 1$ として

$$\dim Im(\Phi_{|mZ_s^*|}) \geqq \dim Im(\Phi_{\Lambda_s^*}) = \dim Im(\Phi_{\Lambda_s}) = n-1 \geqq 2$$

であることから $|mZ_s^*|$ は pencil で compose されない。故に補題(5.3)を使うと、③式から $((n-1)!+1)\tau X_s^* - Z_s^*$ は D_s^* 上で pseudo-effective.

(case 2) $n=2$. このときは D_s^* は nonsingular curve となり、しかも D_s^* 上で degree をとると

$$\deg(Z_s^*) = (Z_s^* \circ (X_s^*)^{n-2}) \qquad [\because n=2]$$
$$\leqq \tau((X_s^*)^{n-1}) \qquad [\because ③]$$
$$= \tau \deg(X_s^*) < \tau((n-1)!+1)\deg(X_s^*)$$

が成りたつので、やはり $((n-1)!+1)\tau X_s^* - Z_s^*$ は D_s^* 上で pseudo-effective. Q.E.D.

補題(5.5): すべての i $(0 \leqq i \leqq n-1)$ に対して

$$((n-1)!+1)^i \tau^i ((Z_s^*)^{n-i-1} \circ (X_s^*)^i)$$
$$\geqq ((Z_s^*)^{n-1}) \geqq \frac{t^{n-1}}{n!+1} - n + 3$$

が成りたつ。

(5.5)の証明： 1) 最初の不等式をまず示す。補題(5.4)の(c)により、$((n-1)!+1)\tau X_s^* - Z_s^*$ は D_s^* 上で pseudo-effective。故に各 j $(1 \leqq j \leqq n-1)$ に対して

$$((n-1)!+1)\,\tau((Z_s^*)^{n-j-1}\cdot(X_s^*)^j) \geqq ((Z_s^*)^{n-j}\cdot(X_s^*)^{j-1})。$$

これをくり返し用いて、

$$((n-1)!+1)^i\tau^i((Z_s^*)^{n-i-1}\cdot(X_s^*)^i) \geqq ((n-1)!+1)^{i-1}\tau^{i-1}((Z_s^*)^{n-i}\cdot(X_s^*)^{i-1})$$

$$\geqq \cdots\cdots \geqq ((Z_s^*)^{n-1})。$$

2) 次に2番目の不等式を示す。$N := \dim \Lambda_s$ とおくと p.39 条件(c)から

$$N \geqq \frac{t^{n-1}}{n!+1} + 1 \quad \text{-------} ④$$

一方 $\Phi_{\Lambda_s^*} : D_s^* \to \mathbb{P}^N$ を考えたとき、Z_s^* は $\Lambda_{s,\mathrm{var}}^*$ $(= (\Phi_{\Lambda_s^*})^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)|)$ の一般元であり、また $\mathrm{Image}(\Phi_{\Lambda_s^*})$ は $\mathbb{P}^N$ のいかなる hyperplane にも含まれないので

$$N < \deg_{\mathbb{P}^N}(\mathrm{Image}(\Phi_{\Lambda_s^*})) + n-1 \leqq ((Z_s^*)^{n-1}) + n-1 \quad \text{----} ⑤。$$

④,⑤より証明すべき2番目の不等式が容易に出てくる。 Q.E.D.

注意： 補題(4.3)は実は V が normal でなくても成りたつので $N = \dim \Lambda_s \leqq (\Lambda_s^{[n-1]}) + n-2 = ((Z_s^*)^{n-1}) + n-2$ [cf. 2) of (4.2)]。これから⑤がで

てくるので上の 2) の部分の別証になっている。

さて D_s' を rational map $\Phi_{|\pi_s^*(T_{s-1}|D_s)|}$ の Graph の normalization とし、$p_s : D_s' \longrightarrow D_s$ を natural projection とする。(但し、$|\pi_s^*(T_{s-1}|D_s)| = \phi$ のときは $D_s' = D_s$, $p_s = id_{D_s}$ とおく)。更に $X_s' := p_s^*(X_s^*)$, $Z_s' := p_s^*(Z_s^*)$, $\Xi_s := p_s^*|\pi_s^*(T_{s-1}|D_s)|$ とおくとき、補題 (5.4) と同様に次のことが成りたつ。

(a) $\Xi_{s,var} = \phi$ か、又は $\Xi_{s,var}$ は base point をもたない。

(b) Y_s' を $\Xi_{s,var}$ の一般元とすると (但し $\Xi_{s,var} = \phi$ のときは $Y_s' = 0$ とおく), 不等式

$$h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \leqq h^0(Y_s')$$

が成りたつ。

今 (5.2) 式の $h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)$ を上から評価するために、次の2つの問題を考える。

(I) できる限り小さい正整数 ν_i $(0 \leqq i \leqq n-3)$ で

$$(Y_s' - \nu_i Z_s' \circ (Z_s')^i \circ (X_s')^{n-i-2}) < 0$$

をみたすものをみいだせ。

(II) $(Y_s' \circ (Z_s')^{n-2})$ の"よい"上限をみつけよ。

こういう問題を考えるのは、次のような補題を示せるからである。

補題(5、6): 正整数 ν_i $(0 \leqq i \leqq n-3)$ が

$$\left(Y_s' - \nu_i Z_s' \circ (Z_s')^{i} \circ (X_s')^{n-i-2} \right) < 0 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

をみたしたとする。このとき

$$h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \leqq \nu_0 \cdot \nu_1 \cdot \cdots \cdot \nu_{n-3} \cdot \left(Y_s' \circ (Z_s')^{n-2} \right) + 1.$$

(5、6)の証明: D_s' の上で完全列

$$0 \to H^0(Y_s' - \nu_0 Z_s') \to H^0(Y_s') \to H^0(Z_s'(\nu_0), Y_s'|Z_s'(\nu_0)) \to \cdots\cdots$$

を考える。但し $Z_s'(\nu_i)$ とは $|\nu_i Z_s'|$ の一般元を意味するとする。⑥を $i=0$ のときに適用して、$\left(Y_s' - \nu_0 Z_s' \circ (X_s')^{n-2} \right) < 0$ が得られるので $h^0(Y_s' - \nu_0 Z_s') = 0$。従って

$$h^0(Y_s') \leqq h^0(Z_s'(\nu_0), Y_s'|Z_s'(\nu_0)).$$

以下 inductive に

$$\begin{aligned} h^0(Y_s') &\leqq h^0(Z_s'(\nu_0), Y_s'|Z_s'(\nu_0)) \\ &\leqq h^0(Z_s'(\nu_0) \cdot Z_s'(\nu_1), Y_s'|Z_s'(\nu_0) \circ Z_s'(\nu_1)) \\ &\cdots\cdots \\ &\leqq h^0\left(Z_s'(\nu_0) \circ Z_s'(\nu_1) \circ \cdots \circ Z_s'(\nu_{n-3}), Y_s'|Z_s'(\nu_0) \circ Z_s'(\nu_1) \circ \cdots \circ Z_s'(\nu_{n-3})\right). \end{aligned}$$

D_s' は normal なので $C := Z_s'(\nu_0)\circ Z_s'(\nu_1)\circ\cdots\circ Z_s'(\nu_{n-3})$ は非特異曲線としてとれ、$h^0(C, Y_s'|C) \leqq \deg_C(Y_s'|C) + 1$。

$$\therefore\ h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \leqq h^0(Y_s') \leqq h^0(C, Y_s'|C)$$
$$\leqq \deg_C(Y_s'|C) + 1 = (Z_s'(\nu_0)\circ Z_s'(\nu_1)\circ\cdots\circ Z_s'(\nu_{n-3})\circ Y_s') + 1$$
$$= \nu_0\cdot\nu_1\cdot\cdots\cdot\nu_{n-3}\cdot(Y_s'\circ(Z_s')^{n-2}) + 1\text{。} \qquad \text{Q.E.D.}$$

そこで (I), (II) の問題を解こう。$\tau = (X^{n-2}\circ E^2) > 0$ であり、かつ E が arithmetically effective なので、D_i ($i=1,2,\cdots,\omega$) の番号のつけ方を、必要ならとりかえて、

$$\left(\sum_{i=0}^{s-1} D_i \circ D_s \circ X^{n-2}\right) > 0,\quad s=1,2,\cdots,\omega, \quad \cdots\cdots ⑦$$

が成りたつようにできる。(小平 [6; p.68 補題 7.9] と同様の議論でできる。)

補題 (5、7): $s \in \{0,1,\cdots,\omega\}$ を任意とする。このとき次の不等式が成りたつ。

(a) $(Y_s'\circ(X_s')^{n-2}) \leqq (D_s\circ M+rX\circ X^{n-2}) \leqq \sigma + d\cdot t\cdot r,$

(b) $(Y_s'\circ(Z_s')^{i}\circ(X_s')^{n-i-2}) \leqq \{((n-1)!+1)\tau\}^{i}\cdot(Y_s'\circ(X_s')^{n-2})$

$\leqq \{((n-1)!+1)\tau\}^{i}\cdot(\sigma+d\cdot t\cdot r), \qquad i=0,1,\cdots,n-2.$

(5.7) の証明： $Y_s' = 0$ のときは明らかなので、
$Y_s' \neq 0$ と仮定する。

(a) $(Y_s' \circ (X_s')^{n-2}) \leqq (p_s^* \tau_s^* (T_{s-1}|D_s) \circ (X_s')^{n-2})$

$= (D_s \circ T_{s-1} \circ X^{n-2}) = (D_s \circ M + rX - \sum_{i=0}^{s-1} D_i \circ X^{n-2})$

$\leqq (D_s \circ M + rX \circ X^{n-2})$ [∵ ⑦]

$\leqq (\sum_{i=0}^{\omega} D_i \circ M + rX \circ X^{n-2}) = (E \circ M + rX \circ X^{n-2}) = \sigma + d \cdot t \cdot r$。

(b) X_s', Y_s', Z_s' が D_s' 上 arithmetically effective であることに注意する。一方、補題(5.4)の(c)により、
$((n-1)!+1)\tau X_s^* - Z_s^*$ は D_s^* 上の pseudo-effective divisor
(cf. (5.3))。よって

$(Y_s' \circ (Z_s')^i \circ (X_s')^{n-i-2}) \leqq ((n-1)!+1)\tau \cdot (Y_s' \circ (Z_s')^{i-1} \circ (X_s')^{n-i-1})$.

Inductive にくり返して

$(Y_s' \circ (Z_s')^i \circ (X_s')^{n-i-2}) \leqq \{((n-1)!+1)\tau\}^i (Y_s' \circ (X_s')^{n-2})$。

これと(a)から、(b)のあとの方の不等式もでる。

Q.E.D.

補題(5.8)： すべての $i = 0, 1, \cdots, n-2$ に対して次のことが成りたつ：

$\nu_i > \alpha r + \beta \Longrightarrow (Y_s' - \nu_i Z_s' \circ (Z_s')^i \circ (X_s')^{n-i-2}) < 0$.

但し、α, β の定義は p.40 を見よ。

(5.8) の証明： 補題 (5.7) の (b) により、

$$(Y_s'\circ(Z_s')^{i}\circ(X_s')^{n-i-2}) \leqq \{((n-1)!+1)\tau\}^{i}\cdot(\sigma+d\cdot t\cdot r).$$

一方、$Z_s'=P_s^*(Z_s^*)$, $X_s'=P_s^*(X_s^*)$, $\deg P_s=1$ に注意すると、補題 (5.5) により、

$$((Z_s')^{i+1}\circ(X_s')^{n-i-2}) \geqq \frac{\dfrac{t^{n-1}}{n!+1}-n+3}{\{((n-1)!+1)\tau\}^{n-i-2}}$$

これから $\nu_i>\alpha r+\beta$ のとき $(Y_s'-\nu_i Z_s'\circ(Z_s')^{i}\circ(X_s')^{n-i-2})<0$ が成りたつことは明らか。 Q.E.D.

以上、補題(5.8)で問題(I)が解決し、また補題(5.7)の(b)で $i=n-2$ とおくことによって

$$(Y_s'\circ(Z_s')^{n-2}) \leqq \{((n-1)!+1)\tau\}^{n-2}\cdot(\sigma+d\cdot t\cdot r) \quad \cdots\cdots ⑧$$

が得られ、問題(II)も解決した。そこでいよいよ定理(5.1)を証明しよう。

(5.1)の証明： 補題(5.6)および補題(5.8)により

$$\begin{aligned} h^0(D_s, T_{s-1}|_{D_s}) &\leqq (\alpha r+\beta+1)^{n-2}(Y_s'\circ(Z_s')^{n-2}) + 1 \\ &\leqq Q_1(r), \qquad [\because ⑧], \end{aligned}$$

ここで $Q_1(r)$ の定義は p.40 を見よ。よって、不等式 (5.2) を参照すると、

$$h^0(M+rX-E) \geqq h^0(M+rX) - \omega\cdot Q_1(r).$$

一方、ω は V 上の linear system Λ ($\subseteq |E|$) の一般元の multiplicity もこめた component の数であるので、$\omega \leqq (E \circ X^{n-1}) = d \cdot t$。故に定理 (5.1) がただちに従う。

Q. E. D.

§6. Proof of Main Theorem

この§では(2、1)の記号を使う。即ち char(k) = 0, かつ V を k 上定義された n 次元非特異射影多様体とし、X を V 上の任意の ample 因子とする, …… etc. このとき小平の消滅定理から, m を正整数とすると、

$$h^0(V, K_V+mX) = \chi(V, K_V+mX) = (-1)^n \chi(V, -mX)$$
$$= d_0\cdot m^n - d_1\cdot m^{n-1} + d_2\cdot m^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1}d_{n-1}\cdot m + (-1)^n d_n$$

但し $d_0 = (X^n)/n!$, $d_1 = -(K_V\circ X^{n-1})/2\cdot(n-1)!$, ……。
そこで正整数 u を 3 条件

$$u \geq n+2,$$
$$h^0(V, K_V+uX) > R_n^*(t), \qquad (\text{cf. } (4.9)),$$
$$t^{n-1}/n!+1 > n-3,$$

をみたすようにひとつ固定する、但し $t = (X^{n-1}\circ K_V+uX)/(X^n)$。こういう u がとれるのは

$$\begin{cases} h^0(V, K_V+uX) = d_0 u^n - d_1 u^{n-1} + \cdots \\ R_n^*(u) = \dfrac{d}{n!+1} u^n + \text{lower degree terms of } u \end{cases}$$

において $d_0 = \dfrac{d}{n!} > \dfrac{d}{n!+1}$ であることから明らか。しかもそういう u を $n, d_0, d_1, \cdots, d_n$ だけによる

数として選べることに注意する。

さて、いよいよ定理(3.1), (4.9), (5.1)を使って定理(2.1)(および注意(2.2))を証明する。

(2.1)の証明: $E = K_V + uX$ とおく。このとき、$u \geqq n+2$ なので定理(3.1)によって、E は ample で $\tau := (X^{n-2} \circ E^2) > 0$. しかも $t := (K_V + uX \circ X^{n-1})/(X^n) \geqq 1$ が成りたつことに注意する。そこで、定理(4.9)の5条件をみたすような linear subsystem Λ of $|E|$ が存在する。故に定理(5.1)を $M = E = K_V + uX$ のときに適用すると、nonnegative integer r に対して

$$h^0(rX) \geqq h^0(K_V + (u+r)X) - d \cdot t \cdot Q_1(r) \quad \cdots\cdots ①,$$

但し $Q_1(r)$ は r の $(n-1)$ 次多項式で、その係数は、d, τ, n, t だけによる数。ここで $d = n! \cdot d_0$, $t = u - \frac{2d_1}{n \cdot d_0}$ が成りたつことに注意。さて

$$\begin{aligned} &h^0(K_V + (u+r)X) - d \cdot t \cdot Q_1(r) \\ &= (-1)^n \chi(V, -(u+r)X) - d \cdot t \cdot Q_1(r) \\ &= \chi(V, rX) - Q_2(r) \quad \cdots\cdots ②, \end{aligned}$$

但し、$Q_2(r) := d\cdot t\cdot Q_1(r) + \chi(V, rX) - (-1)^n \chi(V, -(u+r)X)$

$= d\cdot t\cdot Q_1(r) + \sum_{i=0}^{n} d_i \cdot r^i - (-1)^n \sum_{i=0}^{n} d_i(-(u+r))^i$

$=$ (r の $(n-1)$ 次多項式でその係数は $d_0, d_1, \cdots$ $\cdots d_n$, τ, n だけによる数となっている).

ところが注意(4.7)により、

$$0 < \tau = (X^{n-2} \circ E^2) \leqq (X^n) \cdot ((X^{n-1} \circ E)/(X^n))^2 = d\cdot t^2.$$

よって、nonnegative integer r に対して

$$Q_2(r) \leqq Q(r) \quad \cdots\cdots ③$$

となるような r の $(n-1)$ 次多項式 $Q(r)$ で、その係数が $d_0, d_1, \cdots, d_n$, n だけによる数になるようなものがある。最後に①,②,③により

$$h^0(rX) \geqq \chi(V, rX) - Q(r)$$

が成りたち、証明が終った。　　Q.E.D.

(2.2)の証明：　$E = 2(K_V + uX)$, $M = K_V + 2uX$ とおき、定理(2.1)と全く同様に証明できる。

Q.E.D.

§ 7.　Appendix (I).

この § では $n=3$ かつ $\mathrm{char}(k)=p>0$ とする。そして、この条件のもとに定理 (2.1) のようなことが成りたつかどうかを考える。

そこで V を k 上定義された 3 次元非特異射影多様体，X を V 上の ample 因子とする。$d=(X^3)$，$z=(K_V\cdot X^2)$ とおき、また (4.9) の記号を使って（$n=3$ を代入して）

$$R_3^*(r)=\frac{d}{7}r^3+\left(2d+\frac{1}{7}\right)r^2+2dr+3$$

とおく。更に r の 2 次式 $P(r)$ を

$$\begin{aligned}P(r):=\ &15r^2(z+4d+1)^2\cdot(z+4d)+r\cdot d\\&+z^2(z+4d)+3+h^2(\mathcal{O}_V)-h^3(\mathcal{O}_V)\end{aligned}$$

で定義する。我々の目標は次の定理を示すことである。

定理 (7.1)：正整数 r が $h^0(rX)>R_3^*(r)$ をみたすとする。このとき $h^2(rX)\leq P(r)$。

系(7.2)：正整数 r を不等式

$$h^0(rX) > R_3^*(r) \cdots ①,\quad \chi(V, rX) > R_3^*(r) + P(r) \cdots ②$$

が同時にみたされるようにとったとき（こういう r がとれるのは、$r \gg 1$ のときに $h^0(rX) = \chi(V, rX) = \frac{d}{6}r^3 + \cdots$ が成りたつことより明らか），この２つの不等式は $h^1(\mathcal{O}_V)$ を（従って $h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V)$ を）不変にするような (V, X) の deformation で、保たれる。

（(7.1)⇒）(7.2) の証明：$\chi(V, rX)$ の変形不変性から②式が上のような deformation で保たれていることは明らか。そこで $h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V)$ を保つような (V, X) の specialization および generalization で①式が保たれることを示せばよい。

まず (V, X) のこのような generalization (V', X') を考える。このとき①と定理(7.1)から $h^2(rX) \leqq P(r)$ が成りたち、$h^2(rX)$ の uppersemicontinuity より、$h^2(rX') \leqq h^2(rX) \leqq P(r)$。従って

$$R_3^*(r) + P(r) < \chi(V, rX) = \chi(V', rX')$$
$$\leqq h^0(rX') + h^2(rX') \leqq h^0(rX') + P(r)。$$

よって $h^0(rX') > R_3^*(r)$ を得る。
一方①式が specialization で保たれることは、$h^0(rX)$ の uppersemicontinuity より明らか。　Q.E.D.

いよいよ定理(7.1)の証明にはいる。定理(7.1)の証明方法は定理(2.1)のそれと似かよっている。

(7.1)の証明：　<u>Step 1</u>:　$E = rX$ とおく。このとき $t := (X^{n-1} \cdot E)/(X^n) = r$ が成りたち、しかも $h^0(rX) > R_3^*(r)$ であるので定理(4.9)の条件 $\dim|E| \geqq R_3^*(t)$ をみたす。よって $|rX|$ の適当な linear subsystem Λ が存在して、定理(4.9)の5条件(a), (b), (c), (d), (e)をみたす。そこで Λ の一般元を prime divisors の和 $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ と書き表わす。但し、$D_0 \in \Lambda_{var}$ かつ $\sum_{i=1}^{\omega} D_i$ を Λ の fixed part とする。

$$\begin{cases} T_{-1} := K_V \\ T_s := K_V - \sum_{i=0}^{s} D_i \quad (0 \leqq s \leqq \omega) \end{cases}$$

とおき、$T_s = T_{s-1} - D_s$ に注意すると、完全列

$$0 \to \mathcal{O}_V(T_s) \to \mathcal{O}_V(T_{s-1}) \to \mathcal{O}_{D_s}(T_{s-1}|D_s) \to 0$$

から long exact sequence

$$0 \to H^0(T_s) \to H^0(T_{s-1}) \to H^0(D_s, T_{s-1}|D_s)$$
$$\to H^1(T_s) \to H^1(T_{s-1}) \to Im\,\alpha \to 0$$

を得る。但し、α は natural map : $H^1(T_{s-1}) \to H^1(D_s, T_{s-1}|D_s)$ とする。よって

$$h^0(T_s) - h^0(T_{s-1}) + h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) - h^1(T_s) + h^1(T_{s-1})$$
$$= \dim(Im\,\alpha) \geqq 0.$$

この不等式を $s = 0, 1, \cdots, \omega$ について和をとれば

$$h^0(T_\omega) - h^0(T_{-1}) + \sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) - h^1(T_\omega) + h^1(T_{-1}) \geqq 0.$$

ここで $T_{-1} = K_V$ かつ $T_\omega \sim K_V - rX$ に注意すると、

$$h^0(K_V - rX) + h^1(K_V) - h^0(K_V) + \sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)$$
$$\geqq h^1(K_V - rX).$$

よって Serre duality により

$$h^0(K_V - rX) + h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V) + \sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s)$$
$$\geqq h^2(rX) \qquad \text{-----} ③.$$

<u>Step</u> 2: 各 $s \in \{0, 1, \cdots, \omega\}$ に対し、rational map $\Phi_{\Lambda}|D_s$ の Graph を desingularize したもの D_s^* をひとつ固定しておく。また $\pi_s : D_s^* \to D_s$ を自然な射影とする。更に $\Lambda_s := Tr_{D_s}(\Lambda_{var})$ かつ $\Lambda_s^* := \pi_s^*(\Lambda_s)$ とおくとき、

補題(5.4)と同様に Λ_s^* の variable part $\Lambda_{s,var}^*$ は base point をもたない。さて $\Lambda_{s,var}^*$ の一般元を Z_s^* とし、また $X_s^* := \pi_s^*(X|_{D_s})$ とおく。このとき(補題(5.5)にかわる)不等式

$$(Z_s^* \circ X_s^*) > \frac{r}{5} \qquad \cdots\cdots ④$$

を証明しよう。背理法を使うことにして、$(Z_s^* \circ X_s^*) \leqq \frac{r}{5}$ を仮定する。まず、任意の正整数 m に対して $\dim Im(\Phi_{|mZ_s^*|}) \geqq \dim Im(\Phi_{\Lambda_s}) = 2$ が成りたつので、Bertini の定理によって、$|mZ_s^*|$ の一般元は irreducible nonsingular。更に $(Z_s^* \circ X_s^*) \leqq \frac{r}{5}((X_s^*)^2)$ が成りたつので、補題(5.3)により、$3 \times \frac{r}{5} \cdot X_s^* - Z_s^*$ は pseudo-effective。Z_s^* は D_s^* 上 arithmetically effective な divisor であるから $\frac{3}{5}r(Z_s^* \circ X_s^*) \geqq ((Z_s^*)^2)$。ところが(5.5)の証明の 2) の部分と全く同様に

$$((Z_s^*)^2) \geqq \dim \Lambda_s - 1 \geqq \frac{r^2}{7},$$

但し最後の不等式は Λ が定理(4.9)の条件 c)をみたしているから成りたつ。結局、

$$\frac{3}{5}r \cdot (Z_s^* \circ X_s^*) \geqq \frac{r^2}{7}.$$

これは背理法の仮定 $(Z_s^* \circ X_s^*) \leqq \frac{r}{5}$ に反し、不合理。よって④を得る。

<u>Step</u> 3: $\Xi_s := \pi_s^*(T_{s-1}|D_s)$ とおき、Y_s^* を $\Xi_{s,var}$ の一般元とする。(但し、$\Xi_{s,var}=\phi$ のときは $Y_s^*=0$ とおく。) ここで Y_s^* が D_s^* 上で arithmetically effective であるということに注意する。さて、(補題(5.7)にかわる)不等式

$$(Y_s^* \circ Z_s^*) \leqq 3r(3+4d+1)\cdot(Y_s^* \circ X_s^*) \quad \cdots\cdots ⑤$$

を示そう。まず、$(X\circ D_0\circ D_s) = (X_s \circ \pi_s^*(D_0|_{D_s})) \geqq (X_s^* \circ Z_s^*)$ により、

$$\begin{aligned}(X\circ rX\circ D_s) &= (X\circ D_0\circ D_s) + \sum_{i=1}^{\omega}(X\circ D_i\circ D_s)\\ &\geqq (X_s^*\circ Z_s^*) + \mu_s\cdot(X\circ D_s\circ D_s),\end{aligned}$$

但し $\mu_s \in \mathbb{Z}_+$ は D_s の $\sum_{i=0}^{\omega} D_i$ における重複度とする。ここで定理(3.1)の(iii)から $(X\circ D_s\circ D_s) \geqq -(K_V+3X\circ D_s\circ X)$。

$$\begin{aligned}\therefore\ r(X^2\circ D_s) &\geqq (X_s^*\circ Z_s^*) - (K_V+3X\circ \mu_s D_s\circ X)\\ &\geqq (X_s^*\circ Z_s^*) - (K_V+4X\circ \mu_s D_s\circ X)\\ &\geqq (X_s^*\circ Z_s^*) - (K_V+4X\circ rX\circ X) \qquad [\because (3.1)\text{ の }(i)]\\ &= (X_s^*\circ Z_s^*) - (3+4d)r\\ &\geqq (X_s^*\circ Z_s^*) - (3+4d)r\cdot(X^2\circ D_s).\end{aligned}$$

これから $(3+4d+1)r((X_s^*)^2) = (3+4d+1)r\cdot(X^2\circ D_s) \geqq (X_s^*\circ Z_s^*)$。故に、補題(5.3)により、$3(3+4d+1)r\cdot X_s^* - Z_s^*$ は D_s^* 上の pseudo-effective な divisor。よって⑤式を得る。

Step 4: (補題(5.8)にかわるものとして)各 $s=0,1,\cdots,\omega$ に対して次のことを示そう。正整数 ν に対して

$$\nu \geqq 5(3+4d) \Longrightarrow (Y_s^* - \nu Z_s^* \circ X_s^*) < 0 \qquad \cdots\cdots ⑥。$$

まず、$Y_s^* = 0$ のときは⑥は明らかなので、$Y_s^* \neq 0$ を仮定する。更に、D_i $(i=1,2,\cdots,\omega)$ の番号を、必要ならつけかえて、$(\sum_{i=0}^{s-1} D_i \circ D_s \circ X) \geqq 0$ が各 s に対して成りたつようにしておく (cf. p.50)。こうすると、⑥は計算だけから容易にでる:

$$\begin{aligned}
(Y_s^* - \nu Z_s^* \circ X_s^*) &\leqq (Y_s^* \circ X_s^*) - \frac{r\cdot\nu}{5} \qquad [\because ④] \\
&\leqq (\pi_s^*(T_{s-1}|D_s) \circ X_s^*) - \frac{r\cdot\nu}{5} \\
&= (K_V - \textstyle\sum_{i=0}^{s-1} D_i \circ D_s \circ X) - \frac{r\cdot\nu}{5} \\
&\leqq (K_V \circ D_s \circ X) - \frac{r\cdot\nu}{5} < (K_V + 4X \circ D_s \circ X) - \frac{r\cdot\nu}{5} \\
&\leqq (K_V + 4X \circ rX \circ X) - \frac{r\cdot\nu}{5} = r\left(3+4d-\frac{\nu}{5}\right) \leqq 0。
\end{aligned}$$

Step 5: $3+4d+1$ が正整数となることに注意して $\nu := 5(3+4d+1)$ とおく。このとき、⑥より、補題(5.6)と同様にして、次の不等式を得る。

$$h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \leqq \nu\cdot(Y_s^* \circ Z_s^*) + 1 。$$

さて、まず $Y_s^* \neq 0$ とすると、

$$(Y_s^* \circ Z_s^*) \leqq 3r(3+4d+1)\cdot(Y_s^* \circ X_s^*) \quad [\because ⑤]$$
$$\leqq 3r(3+4d+1)\cdot(T_{s-1} \circ X \circ D_s)$$
$$= 3r(3+4d+1)\cdot(K_V - \textstyle\sum_{i=0}^{s-1} D_i \circ X \circ D_s)$$
$$\leqq 3r(3+4d+1)\cdot(K_V \circ X \circ D_s)$$
$$\leqq 3r(3+4d+1)\cdot(K_V + 4X \circ X \circ D_s).$$

ところが、最下辺の式は常に nonnegative であるので, "$Y_s^* \neq 0$" "$Y_s^* = 0$" いずれの場合にも

$$(Y_s^* \circ Z_s^*) \leqq 3r(3+4d+1)\cdot(K_V + 4X \circ X \circ D_s).$$

よって、

$$\sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \leqq 3r\nu(3+4d+1)\cdot(K_V + 4X \circ X \circ \textstyle\sum_{s=0}^{\omega} D_s) + \omega$$
$$= 15r^2\cdot(3+4d+1)^2\cdot(3+4d) + \omega.$$

今、ω は linear system $\Lambda\ (\subseteq |rX|)$ の一般元の multiplicity もこめた component の数なので、$\omega \leqq (rX \circ X^2) = r\cdot d$ が成りたっている。故に、

$$\sum_{s=0}^{\omega} h^0(D_s, T_{s-1}|D_s) \leqq 15r^2\cdot(3+4d+1)^2\cdot(3+4d) + r\cdot d.$$

これと ③ 式から

$$h^2(rX) \leqq h^0(K_V - rX) + h^2(\mathcal{O}_V) - h^3(\mathcal{O}_V)$$
$$+ 15r^2\cdot(3+4d+1)^2\cdot(3+4d) + r\cdot d \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots ⑦$$

Step 6： 最後に $h^0(K_V-rX)$ を上から評価しよう。そこで、正整数 r に関し、次の3つの場合にわける。

(case 1) $r > \frac{3}{d}$; (case 2) $1 \leqq r \leqq \frac{3}{d}$ かつ $h^0(K_V-rX) \leqq 1$;
(case 3) $1 \leqq r \leqq \frac{3}{d}$ かつ $h^0(K_V-rX) \geqq 2$。

ここで、(case 1) の場合は $(K_V-rX \circ X^2) = 3 - d\cdot r < 0$ であるので $h^0(K_V-rX) = 0$。よって (case 3) の場合を考える。このときは $\Lambda_1 := |K_V-rX|$ とおくと $i := \dim \mathrm{Im}(\Phi_{\Lambda_1})$ は 1 か 2 か 3 のいずれか。一方

$$\begin{aligned} h^0(K_V-rX) - i &\leqq (X^{3-i} \circ \Lambda_1^{[i]}) & [\because (4.3)] \\ &\leqq (X^3)\cdot\left((X^2 \circ K_V-rX)/(X^3)\right)^i & [\because (4.6)] \\ &= d\cdot\left(\tfrac{3}{d}-r\right)^i. \end{aligned}$$

故に i の値によらず

$$\begin{aligned} h^0(K_V-rX) &\leqq d\cdot\left(\tfrac{3}{d}-r\right)^i + i \\ &\leqq 3^2(3+4d)+3 \qquad [\because 3 \geqq dr \geqq 1]. \end{aligned}$$

結局 case 1, 2, 3 いずれの場合にも $h^0(K_V-rX) \leqq 3^2(3+4d)+3$ が成りたつ。これと⑦式から

$$h^2(rX) \leqq P(r)$$

が成りたち（$P(r)$ の定義は p.57 を見よ）証明は完了した。　Q.E.D.

References

[1] S. Abhyankar, Resolution of singularities of embedded algebraic surfaces, Academic Press, 1966.

[2] W. L. Baily Jr., Satake's compactification of V_n, Amer. J. Math., 80 (1958), 348–364.

[3] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. 156, Springer, Berlin.

[4] Y. Kawamata, A generalization of Kodaira-Ramanujam's vanishing theorem, to appear.

[5] S. L. Kleiman, Towards a numerical theory of ampleness, Ann. of Math., 84 (1966), 293–344.

[6] 小平 邦彦, (山島成穂 記), 東大セミナリー・ノート 20, Tokyo, 1968.

[7] T. Matsusaka, The criteria for algebraic equivalence and the torsion group, Amer. J. Math., 79 (1957), 53–66.

[8] T. Matsusaka, On a characterization of Jacobian variety, Memoirs of the College of Science, University of Kyoto 32 (1959), 1–19.

[9] T. Matsusaka, Polarized varieties with a given Hilbert polynomial, Amer. J. Math., 94 (1972), 1027-1077.

[10] S. Mori, Threefolds whose canonical bundles are not numerically effective, to appear.

[11] D. Mumford, Abelian varieties, Tata Studies in Math., Oxford Univ. Press, 1970.

[12] I. Satake, On the compactification of the Siegel space, Journal of the Indian Mathematical Society, 20 (1956), 259-281.